Evaluación en Matemática[1]

Autora y Compiladora: Prof. Ing. Liliana Mónica Saidón (UBA)
ISBN: 987-1330-03-0 - ISBN13: 978-987-1330-03-4

Más allá de las enunciaciones, en la práctica, suele manifestarse la posición más convencional, que considera a la evaluación en matemática periférica a los problemas de enseñanza y aprendizaje y tradicionalmente importa modelos de evaluación generales o "prestados" de la psicopedagogía[2] o la psicometría, que tiende a reducirla a *test* de resultados dicotómicos (sabe o no) o grado o proporción unidimensional (lo que conoce "mide" cuánto en relación a tanto). Tales modelos, han tenido como supuesto que el aprendizaje se produce en tiempos predeterminados o independientes del currículo y la instrucción, arraigándose una concepción de evaluación como actividad terminal y única evidencia del progreso de los estudiantes, convirtiéndose en un instrumento que cumple una función de selección. En efecto, no promueven analizar ni interpretar y mitifican el error como falta de conocimiento o habilidad y, así, queda desatendido el contexto del aula. Al reconocer la evaluación como parte del proceso de enseñanza y del de aprendizaje se incluyen las interacciones sociales que ocurren en clase, descentrando la evaluación de una postura diagnóstica de tipo clasificatorio, hacia una más intervencionista en el quehacer cotidiano.

Se reconoce la demanda de una teoría propia de la valoración en matemática cuando se tiene en cuenta, específicamente, el conocimiento matemático y su alta estructuración que, entre otras características distintivas, ocupa en la práctica un lugar crucial (en la red imbricada de acciones, procedimientos, objetos y esquemas nocionales, nutrida de técnicas, tecnologías y teorías, es de alta gravedad conectiva, el peso de los saberes previos). Se destaca, al respecto, la concepción de ***proceso*** por el que se trata de comprender y aquilatar el sentido que los estudiantes asignan al quehacer matemático y a representaciones e inferencias presentes en la actividad matemática y en todo tipo de ***diálogo*** (entre estudiantes y con el docente). Este planteo asigna a la valoración un significado de proceso continuo y dinámico versus uno estático, en un tiempo especifico de enseñanza y mediante un sólo método - el examen u otro tipo de prueba de carácter terminal -. Las relaciones entre estudiantes, docente y saber, que convencionalmente resultaba escindida (o hasta se procuraba separar de la práctica de evaluación) se recuperan, precisamente, cuando la evaluación se considera un fenómeno didáctico, cuyas características principales son la referencia a un contenido matemático y quehacer vinculado a las prácticas institucionales habituales al respecto.

Competencias actualizadas en diversos Campos Conceptuales

Una de las primeras razones que sustentan el estudio de la evaluación en matemática como campo diferenciado del general, es el reconocimiento de características propias del saber matemático y de la actividad matemática, teniendo en cuenta:

- *Distinción entre evaluación como sanción y valoración como análisis comprensivo del desempeño de un estudiante o grupo*, considerando la actuación del estudiante en relación con el conocimiento y uso de la matemática en variedad de contextos. Este análisis de la actuación incluye valorar tanto el conocimiento de la matemática (hechos, conceptos, teoremas, propiedades) y disposición hacia su uso para asignar valor a los resultados analizados como la actividad implicada.
- *Variedad de propósitos*:
    1) ser considerada por los profesores fuente de evidencias para retro-alimentar lo que los estudiantes conocen y hacen;
    2) mediar entre estudiantes y profesores y otras instancias, en tanto comunica lo que es importante conocer y hacer en clase de matemática.

[1] Material de Cátedra de *Centro Babbage* elaborado por Liliana Mónica Saidón con aportes señalados en el textos y en referencias bibliográficas y la colaboración, que agradecemos, de Graciela Chemello, Cristina Junco, Isabel Ortega y Graciela Negro. (Revisión: Dra. Ing. Estela Kuschnir).
[2] Últimamente incluso de líneas como la del Bono, en nuestro medio.

- *Organización de los contenidos a evalua*r. Es necesario que los modelos de evaluación se organicen en torno a núcleos, dominios o campos conceptuales, propios de la matemática y sus actividades.

En esta dirección, la teoría de campos conceptuales (TCC), constituida desde un punto de vista práctico, por el <u>conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo requiere empleo de una variedad de procedimientos, conceptos y representaciones simbólicas que están en estrecha conexión</u> y desde un punto teórico, por el <u>conjunto de conceptos y teoremas que contribuyen al dominio de estas situaciones aunque sea de forma implícita</u>; atiende a la necesidad de romper con la atomización del saber.

Establecer relaciones entre conceptos básicos y otros en la trama matemática (considerada cuerpo estructurado de conocimientos) en clases de situaciones asociadas a cada área; nos permite analizar el desarrollo de competencias matemáticas alrededor de un campo de problemas y su evaluación por métodos conceptuales. Puede describirse lo que los estudiantes saben acerca de un dominio de conocimiento al mismo tiempo que indagar sobre la maduración de los conceptos dentro del dominio (ya que la estructura matemática modela actuaciones de campos vinculados y se manifiestan lo que Vergnaud llama *teoremas en acto*). Así, para distinguir el conocimientos de, por ejemplo, la estructura multiplicativa que usa el estudiante, es preciso comprender el desarrollo de nociones que intervienen en el isomorfismo de medidas y las dificultades derivadas de esta estructura (como la relación con otros conceptos matemáticos: división, razón, fracción, proporción, proporcionalidad y función lineal...), lo que hace pensar que dichos conceptos no pueden estar desligados en la enseñanza y el aprendizaje (se pueden empezar a destacar desde los primeros años de primaria y potenciar a lo largo de toda la educación básica y media). Tal modelo de interpretación de las actuaciones de los estudiantes ante clases de situaciones asociadas supone interés para el aprendizaje, y por lo tanto para la evaluación, en tanto se centra en el desarrollo de competencias matemáticas (cada vez más complejas), que se manifiestan en la actuación del estudiante, mediado por el contexto y las representaciones activadas, y a los conocimientos matemáticos que pone en juego.
Evidentemente no alcanza con plantear a los alumnos resoluciones esporádicas de problemas ni presentar una o dos situaciones aisladas para constituir condiciones favorables para el aprendizaje. Es necesario construir progresiones, secuencias de situaciones que permitan a los alumnos una construcción progresiva de procedimientos, dando la ocasión de reutilizarlos o mejorarlos en otras situaciones. La ejercitación (¡sí... ejercitación!), de un tipo de trabajo, la práctica de un procedimiento (¡sí... la práctica!) , de una noción, debe contribuir a una .descontextualización. de los conocimientos, es decir, una especie de autonomía de los contextos de origen.

Respecto de la evaluación en matemática vinculada a las “competencias”, suele intentarse distinguirlas cuando se “ponen de manifiesto” en la resolución de desafíos que se presentan en distintos contextos, diferente género (literario del enunciado y del encuadre) y que dan la alternativa de re-inversión de los contenidos matemáticos.

Algunas perspectivas insisten en la necesaria (o recomendable) correlación con situaciones que rescatan como “propias de la realidad” o “concretas”. Como ejemplo, en tal sentido, puede mencionarse el dominio de Competencia en Matemáticas de OCDE / PISA señalado en tanto concierne a la capacidad de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente sus ideas al tiempo que se plantean, formulan, resuelven e interpretan problemas matemáticos en una variedad de contextos. La evaluación de OCDE / PISA se concentra en problemas “reales”, propios de cierta cotidianeidad y con vinculación concreta, que van más allá de los problemas típicamente escolarizados. Son propuestas que han recibido críticas diversas y , según la organización, se caracterizan en que la aplicación de técnicas de razonamiento cuantitativo o espacial, así como de otras herramientas matemáticas de resolución, puede contribuir a clarificar, formular o resolver el problema implicado.
El nivel de competencia en matemáticas de OCDE / PISA se refiere a la medida en la que estudiantes de 15 años pueden ser considerados “como ciudadanos reflexivos y bien informados además de consumidores inteligentes”.

Parten de señalar que en todo el mundo, las personas se enfrentan a una diversidad cada vez mayor de tareas que involucran conceptos cuantitativos, espaciales, probabilísticos, etc. (dan el clásico ejemplo de los medios que contienen gran cantidad de información presentada en tablas, cuadros y gráficos sobre temas como el clima, la economía, la medicina, y el deporte, entre otros como la necesidad de leer formularios, interpretar horarios, realizar transacciones, etc).
La competencia matemática de OCDE / PISA se enfoca en la capacidad de los estudiantes de utilizar su conocimiento matemático para enriquecer su comprensión y promover su capacidad de acción.

Capacidades y Competencias
El equipo ERMEL (Equipo de investigación sobre la enseñanza de la Matemática) perteneciente al Instituto Nacional de Investigación Pedagógica de Francia, señala una lista de capacidades necesarias para la resolución de problemas:

- saber qué es lo que se busca, ser capaz de representarse y apropiarse la situación;
- ser capaz de...
    - ... concentrarse el tiempo suficiente y también de descentrarse, cambiar su punto de vista;
    - ... movilizar en el buen momento los saberes y los saber-hacer anteriores;
    - ... guardar la traza de sus ensayos, de organizarse, de planificar, de gestionar la información que se dispone, ya sea dada o que sea necesario buscarla o construirla;
    - ... intentar, atreverse a actuar, a arriesgarse, a equivocarse
    - ... controlar el estado de su procedimiento, medir la distancia que lo separa de la solución;
    - ... validar, probar, etc.
- - poder formular, comunicar sus hipótesis, sus certidumbres, sus estrategias.

Estos saberes o saber-hacer no aparecen de un día para el otro, será necesario un largo aprendizaje a veces bastante global y a veces también bastante específico a una u otra de las capacidades.[9]
Para que un alumno se apropie de una situación es necesario que pueda: comprender cuál es la situación que se le plantea, comprender qué es lo que se busca e iniciar procedimientos de resolución cuyos resultados puedan ser evaluados

Guardando cierta correlación con las capacidades mencionadas, fuera del encuadre escolar, OCDE / PISA define de la siguiente manera la competencia matemática:

> *La competencia matemática es la capacidad de un individuo para identificar y entender el rol que juegan las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundamentados y utilizar las matemáticas en formas que le permitan satisfacer sus necesidades como ciudadano constructivo, comprometido y reflexivo.*

Para evaluar el nivel de competencia matemática de los alumnos, OCDE / PISA se basa en las ocho competencias matemáticas específicas identificadas por Niss (1999) y sus colegas daneses:

1. **Pensar y razonar**. Incluye plantear preguntas características de las matemáticas ("¿Cuántas … hay?", "¿Cómo encontrar …?"); reconocer el tipo de respuestas que las matemáticas ofrecen para estas preguntas; distinguir entre diferentes tipos de proposiciones (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, condicionales); y entender y manipular el rango y los límites de ciertos conceptos matemáticos.
2. **Argumentar**. Se refiere a saber qué es una prueba matemática y cómo se diferencia de otros tipos de razonamiento matemático; poder seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos de diferentes tipos; desarrollar procedimientos intuitivos; y construir y expresar argumentos matemáticos.
3. **Comunicar**. Involucra la capacidad de expresarse, tanto en forma oral como escrita, sobre asuntos con contenido matemático y de entender las aseveraciones, orales y escritas, de los demás sobre los mismos temas.

---

[9] INRP, 1986, .Apprentissages à la résolution des problèmes au cours élémentaire., Equipe de recherche sur l.enseignement des mathématiques, Francia.

4. **Modelar**. Incluye estructurar la situación que se va a moldear; traducir la "realidad" a una estructura matemática; trabajar con un modelo matemático; validar el modelo; reflexionar, analizar y plantear críticas a un modelo y sus resultados; comunicarse eficazmente sobre el modelo y sus resultados (incluyendo las limitaciones que pueden tener estos últimos); y monitorear y controlar el proceso de modelado.
5. **Plantear y resolver problemas**. Comprende plantear, formular, y definir diferentes tipos de problemas matemáticos y resolver diversos tipos de problemas utilizando una variedad de métodos.
6. **Representar**. Incluye codificar y decodificar, traducir, interpretar y distinguir entre diferentes tipos de representaciones de objetos y situaciones matemáticas, y las interrelaciones entre diversas representaciones; escoger entre diferentes formas de representación, de acuerdo con la situación y el propósito particulares.
7. **Utilizar lenguaje y operaciones simbólicas, formales y técnicas**. Comprende decodificar e interpretar lenguaje formal y simbólico, y entender su relación con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico / formal, manipular proposiciones y expresiones que contengan símbolos y fórmulas; utilizar variables, resolver ecuaciones y realizar cálculos.
8. **Utilizar ayudas y herramientas**. Esto involucra conocer, y ser capaz de utilizar diversas ayudas y herramientas (incluyendo las tecnologías de la información y las comunicaciones TICs) que facilitan la actividad matemática, y comprender las limitaciones de estas ayudas y herramientas.

En síntesis, distinguen como capacidad crucial implícita en esta noción de la competencia matemática la de plantear, formular, resolver, e interpretar problemas empleando las matemáticas dentro de una variedad de situaciones y contextos. Estos contextos van desde los puramente matemáticos a aquellos que no presentan ninguna estructura matemática aparente (y nos colocan frente al desafío de estructurar o modelizar matemáticamente). También es importante enfatizar que la definición no se refiere solamente a un nivel mínimo básico de conocimiento de las matemáticas. Al contrario, la definición atañe a la capacidad de utilizar las matemáticas en situaciones que van de lo cotidiano a lo inusual y de lo simple a lo complejo.

Más adelante, dentro de la secuencia de problemas que hemos seleccionado para ilustrar distintos estilos, funciones, consideraciones y propósitos, se presentarán algunos tomados de entre los "liberados" por OCDE / PISA. Se señalaran los que, particularmente, dan lugar a la confrontación de distintos procedimientos empleados, la "discusión" que permite ir construyendo comunitariamente "metodologías" que se desencadenan en las resoluciones en pro de reinvertir adquisiciones y comprobar su eficacia en situaciones similares, llamando "situación similar" a aquella que solicita del alumno las mismas capacidades (no necesariamente, de temas iguales) y/o las referidas a contenidos con un tratamiento de técnicas y, más aún, "tecnologías" próximas.

La Clase al Rescate de las Competencias del Aislamiento

Respecto del tipo de problemas que suelen seleccionarse en relación con la evaluación de competencias en proyectos como el citado, es importante señalar que:

- no siempre logran darles cabida desde el "estilo" que reivindican, a los problemas matemáticos de neto corte abstracto que permiten no sólo ilustrar o poner de manifiesto sino "modelizar" contenidos cruciales e incluso, abordar lo "meta-matemático".
- De adoptarlos como único medio para hacer matemática (bien dicen que "hacer matemática" es ocuparse de los problemas), dejan de lado a desafíos que anclan en el patrimonio cultural y científico de la matemática y a cuyos "retos" no sólo tienen derecho los estudiantes sino que son los que les dan la oportunidad de ingresar funcionalmente a una metodología disciplinar y didáctica en que los docentes tienen la responsabilidad de acompañarlos.
- diversas investigaciones ponen de manifiesto hasta qué punto los mentados contextos "reales" suelen introducir complicaciones adicionales en lugar de facilitar la puesta en juego de constructos matemáticos conceptuales.

Aquellos que, aparentemente, están "claramente" vinculados con las situaciones "concretas" que los ilustran o manifiestan... desde la perspectiva del docente pero, difícilmente, desde la del estudiante.

- Sobre todo, cuando los contextos "de la realidad" se presentan, ya no sólo culturalmente sesgados en su selección, no sólo "preceptualmente" considerados como tales desde la rica y matemáticamente estructurada "mirada" de quienes los refieren en el diseño de problemas (que contrasta con la de los destinatarios), sino... hasta, completamente conceptualizados desde la materia que estudia alguno de los aspectos de la situación (física, economía, óptica... entre otras)
- cuando cada problema que compone una eventual evaluación aparece aislado de la responsabilidad del docente (al que, peor aún, sólo le queda el rol del "culpabilizado" impersonalmente y por elevación de las incorrecciones), pueden establecer una lógica de valoración que enfoca exclusivamente la relación del estudiante con el problema, en un instante a-histórico e individual, borrando el recorrido y la posición escolar que afecta lo que ese "resolutor" puede rememorar estructuralmente.

Restituirles el valor a los problemas como medios de evaluación lleva a contextualizar la que pudiera incluirlos, dentro de la organización interna de los contenidos a desarrollar establecida (en correlato con los retenidos oficialmente para ser enseñados); por el docente. Explicitando su responsabilidad de construir o seleccionar cada situación de aprendizaje (su adaptación al nivel, al momento, a las características de su clase, etc.); determinar las diferentes fases del proceso del cual la evaluación es parte. Imbricada dinámicamente en la cotidianeidad de la enseñanza ya que parte de la tarea docente incluye prever los procedimientos de los alumnos, pasibles de aparecer ante la situación planteada y, recíprocamente, sus intervenciones acordes y organizada temporalmente para obtener información sobre el estado de conocimientos de los estudiantes, más allá de la implicada en los exámenes institucionalmente establecidos.

Preparando exámenes... competentemente

Si bien los exámenes son parte ineludible de la evaluación, si a estas instancias quedara reducida, escucharíamos las "voces" de los estudiantes sólo entonces, en contextos en que campea la tensión de la "puesta a prueba" cuando, incluso, está en juego la promoción. Cruzarla con situaciones de resolución grupales y personales en que la intervención docente da progresivo sustento a la autonomía y al auto-monitoreo de la comprensión propia (en relación a los contenidos actualizados en la reconstrucción necesaria frente al contexto del problema y en contraste con las perspectivas de los compañeros), abre en clase el espacio para estudiar y "prepararse", mientras el docente se ocupa de:

- respaldar a los estudiantes para que logren llevar a cabo y mejorar sus procedimientos; permitirles apropiarse de los de sus compañeros, llevándolos a reformularlos o a hacerlos funcionar por sí mismos
- entusiasmarlos, pedirles que actúen, que prueben, que se arriesguen, ayudarlos a organizarse
- reformular las consignas, las finalidades a lograr cada vez que pierdan el rumbo.
- subrayar las adquisiciones, aportar conocimientos e información con la que los estudiantes podrían no contar, para identificarlas, nombrarlas, incluso definirlas, relacionarlas con otros conceptos.
- cuando el problema ha sido resuelto, es aún necesario poner en evidencia, con los estudiantes, las características importantes de la situación de manera de permitirles reconocer posteriormente las situaciones análogas
- precisar lo que falta por adquirir sobre un tema dado y los recursos que serán ofrecidos para lograrlo[12].

En estos momentos "oficializados" para estudiar y "prepararse" para el examen... en clase, porque confiar exclusivamente en la "tarea para el hogar" pude redundar actualmente en reiteradas frustraciones, las pautas de trabajo podrían asegurarles a los alumnos que pueden decidir individualmente la resolución de un problemas, los pasos a seguir…

[12] Ermel, 1991, Apprentissages numériques et résolution de problèmes, CE1 Hatier, Francia, citado por Irma Saíz en documentación ministerial (1998).

Incluso que pueden probar, equivocarse, que cuentan con el tiempo suficiente para ello, que pueden buscar distintos recursos, trabajar sobre su hoja sin preocupaciones por la prolijidad (habrá un momento específico para la presentación de resoluciones), que se puede borrar, tachar y volver a empezar.
La tarea de organizar adecuadamente las distintas actividades a proponer, seleccionando problemas adecuados y análogos a los que compondrán el examen.

La Evaluación... ¿en un Fenómeno?

Considerando la evaluación como fenómeno didáctico, analizamos las relaciones entre el maestro - el saber – el alumno que se establecen en clase, en situaciones de validación, que requieren justificar el carácter de verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción (Brousseau, 1987), como a su vez las normas socio-matemáticas (aspectos normativos de las discusiones matemáticas que son especificas de la actividad matemática de los estudiantes y que regulan las argumentaciones e influyen en las oportunidades de aprendizaje).

Las representaciones que emergen durante la actividad matemática (como la resolución de problemas, por ejemplo) se vinculan con los conocimientos (y sus organizaciones) que los protagonistas actualizan en la (re)construcción rememorativa frente al tipo de problema y su contexto, en una relación dialéctica de realimentación recíproca. Desde este enfoque, las representaciones que el alumno anima durante la resolución de un problema o, en términos más generales, su compromiso durante una actividad matemática, pueden interpretarse y esgrimirse para evaluar los conocimientos y esquemas de conocimiento habilitados e incluso... ¡para activarlos!.

Se convierte en un potente medio para la evaluación, ya que permite analizar dinámicamente la validez de los razonamientos de los estudiantes y su nivel de competencia en acción.

Perplejidades en la Gestión de Clase

Uno de los desencantos propios del momento de corrección de exámenes, es el que se vincula con la corroboración, ya no de la falta de estudio, sino de lo poco que efectivamente comprendieron los estudiantes de las explicaciones y ejemplos ofrecidos en clase. Surgen interrogantes que van desde el clásico... "¿por qué no preguntaron o consultaron sus dudas?" (dado que se les ha abierto esta alternativa), a considerar que no estaban prestando la atención necesaria, pasando por complicados replanteos en que se cruza la certeza de escasos conocimientos previos (y "base" precaria) y la sospecha de la falta de compromiso e involucramiento, como si se escatimara el elemental sentido común y ejercicio del pensamiento aplicado a todo lo que "suene" a matemática... por más esfuerzos que se pongan por "dialogar" en clase.

Para habilitar una genuina escucha de las voces de los estudiantes y promover un auto-monitoreo de la comprensión, es preciso establecer una organización de la clase acorde. La planteada por el grupo del IREM de Lyon, Francia, relacionada con el debate, apunta a iniciar progresivamente a los alumnos en el razonamiento deductivo a través del intercambio. Acaso podemos plantear algunas alternativas ya que la apropiación de las reglas del debate matemático y su aplicación en situaciones concretas de nutridas clases de niveles diversos, no siempre parece, mucho menos como experiencia de intercambio inaugural, viable (de todos modos, más adelante, en uno de los problemas seleccionado, se ilustra una posibilidad semejante que se llevó a cabo en clases numerosas) Alternativas tan simples, e incluso tan "clásicas", como la repregunta con que el docente "abre" el juego a una dinámica de clase en que los que circula es, sino "debatible", sujeto a re-consideración; los momentos de lectura personal (para anotación de al menos dos preguntas sobre el texto); el establecimiento de nuevas reglas que dejen en claro los momentos en que el docente no va a intervenir para dar **la** respuesta correcta sino, apenas, para arbitrar el intercambio argumental en torno a las que hubieran propuesto los estudiantes.

Una de los motivos por los que estas oportunidades deben propiciarse es que, justamente, los estudiantes pueden estar convencidos de haber entendido lo que se expone en explicaciones y ejemplos, faltos quizá de costumbre de monitorear el nivel de su propia comprensión.

Recordemos que la internalización de estrategias de monitoreo de la propia comprensión está correlacionada, en su génesis, su regulación y enriquecimiento, con la actividad que por antonomasia la convoca... la lectura (incluso, o sobre todo, acorde a otros autores, la lectura estética, no sólo la eferente[3]).

Los alumnos atienden la exposición del docente, y frase a frase, no aparece necesidad alguna de consultar porque la corrección sintáctica, gramatical y narrativa fluye sin crear conflicto alguno... de "seguimiento". Para poner en evidencia lo que excede la aceptada prosecución de la "crónica", se hace necesario un "andamiaje" para, paradójicamente, ayudar a los estudiantes a entender que no están entendiendo... poner de manifiesto la falta de comprensión derivada de la fuga hacia el "estilo" en lugar del compromiso con el contenido, falla de la efectiva acción de su puesta en cuestión, problematización y confrontación con creencias previas (posición, pasiva, propiciada y usufructuada, tanto por lo "publicitario" en particular como por los discursos apelativos en general, que pueblan y dopan los mensajes que circulan, incluso, los supuestamente "didácticos"[4]).

En un trabajo que refleja experiencias de fines de los 60, se describe una estrategia para la enseñanza, consistente con esta propuesta, desarrollada en la Facultad de Ciencias Exactas (de aquella, Universidad de Buenos Aires):

> El docente desarrolla su tema de la manera más clara posible, sin trampas. Luego, cuando los alumnos aseveran haber entendido, llega el momento de plantear una situación aparentemente paradójica como resultado de lo que se expuso. Aparece la perplejidad.
> El docente explica el tema nuevamente y todos vuelven a aceptar que entendieron perfectamente. Pero la dificultad continúa. Comienza el debate. La discusión produce ruido, barullo, bochinche. Es el momento perfecto. Se concretó el primer paso. El aula silenciosa habría significado el fracaso de la explicación.
> El segundo paso consiste en lo que se denomina "rebobinar". Retroceder y buscar la falla en la comprensión. El ideal es que los propios estudiantes la encuentren, por supuesto con la ayuda del docente, que dará pistas. Termina la segunda etapa.
> Citando a Flichman[5], joven ayudante, por entonces: "El alumno difícilmente olvidará o distorsionará el concepto así adquirido. Al menos ese es el deseo del docente."

A nivel "meta-matemático", los estudiantes aprenden que en ciencia, son las preguntas las que gobiernan la investigación, no tanto como las respuestas, que pueden no ser definitivas.

Es particularmente interesante señalar cómo dentro de la tan vapuleada enseñaza "expositiva" (que es la que ocupa, por otro lado, una proporción notable del tiempo de clase), pueden distinguirse recursos que acaso encubran rastros de una callada dialógica, de convocatorias a intervenciones más o menos explícitas... de una trama más abierta de discurso que virtualmente va "completando" quien escucha, rasgos que quizá caractericen las clase de esos docentes de los que sus alumnos sencillamente dicen: "explica muy bien". Este rescate no sólo permite tematizar la comunicación entre el docente y los estudiantes en torno a un contenido sino que nos pone en guardia frente a la emblemática normativa pedagógica que, con sus embates prescriptivos, puede llegar a desbaratar los recursos didácticos propios de un docente en relación con un determinado contenido, dejándole a cambio una serie de mandatos que no siempre llegará a poner positivamente en práctica.

Veremos, como ejemplo al respecto, una posible exposición del Teorema de Euler[6].

---

3 *La lectura estética es en la que está presente un sentimiento, el lector está vislumbrando y pensando (lo que está viviendo durante y a través de la lectura). La lectura eferente es la lectura que trata de retener, de cargar, de llevar consigo.*

4 Es de particular interés, al respecto, los estudios de los textos de formación o de divulgación de variedad de "modas pedagógicas".

5 Eduardo Flichman: "La función de la perplejidad", U. N. de Gral. Sarmiento

6 Recordemos que es el teorema que relaciona el número de caras, vértices y aristas de cualquier poliedro simple (sin orificios). Establece, justamente, que en un poliedro simple, el número de caras, C, más el número de vértices, V, es igual al número de aristas, A, más dos. Es decir: $C + V = A + 2$

El reinado de los números contra el ensalmo de las letras

Vamos a suponer que se eligió trabajar en clase con el Teorema de Euler no sólo por su contenido disciplinar específico sino porque la docente (protagonista de este ejemplo), considera que tiene cierto valor propedéutico:

> En tanto relaciona las "letras" en un enunciado algebraico, con valores diversos acorde al poliedro al que se aplique, confronta (y llevaría a cuestionar con contundencia y simplicidad), la concepción habitual en los estudiantes que suelen considerar que en los enunciados algebraicos, cada letra está en lugar de **un** número. Cada letra, según implícito parecer, es una incógnita que debiera o pudiera averiguarse y que, sólo de momento, queda literalmente expresada pero a la que, al menos virtualmente, se le podría restituir su valor, propio y único, el que le corresponde por derecho. Restituírselo con alguna técnica que haría las veces de antídoto-sortilegio, como el del mentado beso que le devuelve al sapo su encantador carácter de príncipe que alguna brujería algebraica le hubiera birlado. Convengamos que, más allá de la discutible avenencia de la alegoría, incluso algún profesor de matemática podría confesar que la aparición de las letras suele producir una reacción de inicial "molestia", que acaso se calma con el aprendizaje de las técnicas para "despejarle" o calcularle, llanamente, **el** número que le corresponde a cada una. La serenidad recuperada se acrecienta si ese número es redondamente un entero o, en el peor de los casos, una selecta fracción pero, de modo alguno... ¡un rango! (que no se sabe si empeora cuando está acotado o cuando se extiende, covariable, de punta a punta, de uno a otro infinito... negativo en un extremo, para colmo de males).
>
> La docente anticipa que en ciertos casos, será fruto de la tarea en el novedoso contexto de Euler, un sentido adicional para "las letras", enriquecedor del significado personal de algunos alumnos en una mera asimilación sin conflicto. Para otros estudiantes, la lógica de significación desencadenará una acomodación más laboriosa porque la situación lleva a una confrontación que algunos autores considerarían del nivel de una crisis semiótica y otros, explicarían como propiciatoria del franqueamiento de un obstáculo personal. La profesora supone, en su análisis a priori, que este $C + V = A + 2$ podría confrontarse con una previa concepción pero que su simplicidad, la impondría "naturalmente" o que, por su contundencia, sacaría a flote desde una manifestación superadora a quienes se hubieran hundido en la crisis del contraste de significados.

Imaginemos que la docente intenta, no sólo explicar con claridad, sino además, ilustrar el teorema, (yendo de lo particular a lo general, pidiendo que se corrobore la relación "sobre" los cuerpos a los que se puede "aplicar"...).

Eventualmente, contagia su entusiasmo a algún estudiante que lo sintoniza al nivel en que la profesora lo procura:

> Producir cierta sorpresa en la clase porque, más allá del contenido y eventual potencial propedéutico, es su convicción que de la regularidad que el teorema ilustra con elegancia, emerge meta-matemáticamente parte del laico milagro, ese que permite que comprendamos lo que nos rodea (en el múltiple sentido del término "comprensión"), matemáticamente.

Se detiene en el rol que cumplen "las letras" que citan la propiedad, procurando la devolución a los estudiantes de la responsabilidad de controlar que los resultados de su acción (de discriminados conteos sucesivos) se correspondan con los que aparecen en el enunciado algebraico de la "fórmula".

> Sólo para quienes logran hacerse cargo de velar la necesaria coherencia que deben constatar entre resultados operativos y operatorios ("los del conteo" y "los de la fórmula", respectivamente), se ha tendido un "medio" (¿"*millieu*" diría Brousseau?) que configurará el espacio semiótico, límite y escenario de cualquier ulterior atribución de significado.

Da tiempo para que muchos logren ir y venir desde los valores que se suman y comparan a los que se concretan en el conteo y/o los que se atribuyen a expensas de tal internalizada operación.

> Operación que "surge" de la representación del cuerpo y de la que, simultáneamente, "surge" el poliedro como tal porque es esa acción la que le confiere tal entidad.

Esa acción le da sentido de “imagen”[7]. Puede, así, gestar la representación del “poliedro” o, acaso, a la tridimensional “concepción corporal” (similar a la “concepción figural” con que Fischbeim denomina a toda esa “visualización operatoria-formal” plasmada en los dibujos que ilustran las figuras geométricas).

Con material, dibujos y ejemplos, la docente procura que a cada una de las concretas representaciones se le compare la enunciación que las vincula en la formulación algebraica.

Las letras son iniciales de la categoría de elemento que se debe contabilizar y sólo admite como valor, discretamente, un entero. Por eso, la docente considera que la enunciación algebraica ofrece un registro lo suficientemente apegado a lo icónico como para que todo resulte, al menos inicialmente, de una continuidad evidente.

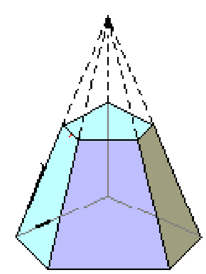
A pesar de lo que anticipara para el desenvolvimiento de la clase, una parte de los estudiantes podría aceptar con demasiada condescendencia lo que la profesora sigue intentando aparezca como todo un hallazgo. ¿Por qué no hay asombro? ¿Es que no entienden? ¿Es que están distraídos? ¿Es que están demasiado cómodos “siguiendo” la explicación como si fuera un mero relato, una crónica de comportamiento que podría ser esta o cualquier otra? ¿Será que verifican un “comportamiento” de cada cuerpo según cada conjunto de valores que toma la fórmula sin que se evidencie la generalidad de una propiedad en juego? Pero, si de generalización se trata, a menos que la inducción se eleve a “ley”, no podrían o no tendrían que estarla palpitando desde los casos que se multiplican como representativos. Siquiera exponer una demostración ayudaría en este caso, de hecho hasta podría constituir un obstáculo didáctico porque sumaría acatamiento a una práctica que, como mínimo, tendría que asociarse a una necesidad lógico deductiva.

La duda como frontera entre el acatamiento banal y la aceptación significativa

La docente elige como estrategia “problematizadora”, establecer una serie de interrogantes que fuerce a los alumnos a reconstruir a costa de su propia elaboración conjetural lo que se acaba de presentar como fórmula a comprobar, caso a caso. Se intenta ahora, retroceder, entonces, para incitar la puesta en duda de lo que hasta el momento se acataba “naturalmente”.

Propone:

Han verificado que en este paralelepípedo se cumple la formula de Don Euler, así como en cada cubo en que $C + V = A + 2$ las caras son 6 y 12 las aristas así como 8, los vértices. Si en el centro de una de las caras, se eleva un vértice, surgen 4 caras extras y 4 aristas adicionales y sólo un vértice. Así, la igualdad de Euler dejaría de cumplirse porque tendríamos 5 unidades más del lado del signo en que se suman caras y vértices y sólo 4 adicionales del lado en que se computan las aristas $C + 4 + V + 1 = A + 4 + 2$. Sin embargo, difícilmente hubiera perdurado un teorema tan precario que a la primera maniobra se desmorona, ¿no?



Ahora son los estudiantes los que tienen que verificar la racionalidad de lo propuesto, controlar activamente la fórmula desde el paralelepípedo de partida. Se buscan otros ejemplos, como la pirámide que se trunca o, el recíproco, tronco piramidal que pasa a pirámide (ilustrado en la figura).

[7] La imagen es fruto de un acoplamiento entre la proyección de una imitación, interior y simbólica, de acciones previamente ejecutadas sobre el objeto y la enriquecida sustanciación a la que ese respaldo operativo ya plasmado da lugar, en una creciente producción (retroalimentación de la acción por la conceptualización) que suele imputarse a la “visualización”. Práctica compleja, nutrida culturalmente, que está siempre a media agua entre la acción del sujeto, “visualizar”, y la “reacción” que la “imagen” del objeto construido refleja y proyecta en su carácter de registro, la “visualización” es medio y vía de un proceso dialéctico de significativa atribución de “objetividad” (que deriva de los contextos de acción y aplicación cuyos rastros quedan implícitos en el esquema de conocimientos que le da sustento a la imagen). Las acciones sobre el objeto a las que hicimos referencia, implican “todo” lo que se “puede hacer” con el objeto. Ese “poder hacer” incluye la acción material (sensorio-motor), “lo que se puede decir” (descripción) o pensar y las operaciones en que se puede involucrar (como las anticipaciones y predicciones del comportamiento del objeto en ciertas situaciones). De algún modo, la significación de un objeto está dada por “lo que se puede hacer con el objeto”. Los medios empleados (que pueden pasar al principio inadvertidos) para ejercer un comportamiento (un comportamiento comienza con una intención) sobre el objeto, aportan a la construcción de significados.

Los estudiantes aceptan la verificación operatoria y controlan con su incipiente maniobrar algebraico que la igualdad no se mantiene, aparentemente.
De pronto, del control de la situación concreta, física, de la que la fórmula es registro y enunciación algebraica, surge la evidencia: el modo en que se planteaba la duda era "tramposo". En el caso del paralelepípedo o en el cubo, además de "ganarse" cuatro caras, se "perdía" la que quedaba "tapada" por la emergencia del nuevo vértice, así que se terminaban sumando 4 de un lado y otro del signo igual, en la fórmula. Un control práctico similar, "salva" al ejemplo de la transformación pirámide-tronco y viceversa.
La duda, no será metódica, siquiera sistemática, pero cumplió su rol en tanto aportó la imputación de "fisuras" en el discurso incólume que no permitía entrada alguna de control alguna.
La profesora decidirá, en todo caso, hasta que punto extiende la formalización y si incluye en el desenvolvimiento de la institucionalización ulterior el principio de inducción completa, la demostración "oficial" del Teorema de Euler (¿habrá aparecido como necesidad o al menos como perspectiva e interrogante?) y/o las regulaciones de las maniobras propias de la operatoria algebraica que estuvieron implícitas en acción en las operaciones con que trabajaron, en el desenvolvimiento de procedimientos que se distinguieron (sumar lo mismo o no a ambos lados del signo igual, sumar y restar, , etc.), así como en la estructura general implicada (restar miembro a miembro como operación aceptable en tanto resultante de la coordinación de otras admitidas, control de equivalencia de las expresiones a ambos lados del signo igual como operación y como formulación, etc.).
Más allá de las derivaciones disciplinares, el desarrollo de este "ejemplo" puede haber dejado impactado lo que constituye, según la algunos autores, el "contrato pedagógico" (excede en generalidad al "contrato didáctico", propio del contenido matemático en juego) porque se ha dado lugar a la emergencia de un género al que no se apela clásicamente en el aula; instaurado la posibilidad de discurrir con una dinámica de clase de algún modo poco convencional; dando pie al establecimiento de nuevas pautas de comunicación e intercambio, a la evidencia de modos alternativos de evaluar lo que se aprende y monitorear la comprensión de lo que se está desarrollando en la propuesta de enseñanza. Si, además, en la eventual institucionalización se logra dar entidad y recuperar la puesta y el "escenario" como parte de lo que urdirá la trama de la memoria de clase, dado que concertó un ambiente rico también meta-matemáticamente, se constituirá un mojón al que se podrá retornar cada vez que sea necesaria una re-inversión en torno a alguno de los ejes de composición de sentido matemático involucrados.

La entidad interpelada del error

Existe una diferencia entre las situaciones didácticas en las que el docente ofrece información o una explicación para que cada estudiante "comprenda" y la que se desarrolla cuando tiene presente que se dirige a un alumno que puede estar preservando su propia lógica de significados en relación con las cuestiones en juego en el discurso en desenvolvimiento.

Analicemos diversas perspectivas de la escena:

- el docente enfrenta a un sujeto, no sólo capaz de aquilatar el impacto que sus enunciaciones podrían tener sobre algún significado personal eventualmente afectado sino habilitado para aceptarlas o rehusarlas. Para argumentar y, acaso, pedir u ofrecer "pruebas", oponer otras afirmaciones aún si por acatamiento a cierto contrato pedagógico, las formule como dudas o consultas. Sea que estas preguntas efectivamente se enuncien o se sostengan hasta que en el devenir del callado "diálogo" queden explicitadas en un intercambio verbal o en otra instancia posible (incluso, aquella en que el docente se hace cargo de otorgar la palabra o hasta de asumir la voz del alumno que no se atreve o no alcanza a poder manifestar su réplica)
- el alumno no confronta porque la información que ofrece el docente se cruza genuinamente con su repertorio de sentidos y lo nutre sin ponerlo en conflicto, al menos no en esta presentación de los contenidos
- los conocimientos previos de los estudiantes no alcanzan para que el discurso del docente se articule en enunciados siquiera inteligibles.

Se hace imprescindible encontrar un abordaje que admita el intercambio a menos que el docente y los estudiantes “acuerden” sostener la escena y posponer la comprensión que se “compromete” para oportunidad posterior. Si esto se prolonga más allá de lo admisible, queda establecida una ficción didáctica

- el docente tiene que ofrecer recursos meta-didácticos suficientes o abrir la propuesta a nuevos protocolos de comunicación para que este diálogo se produzca porque se evidencian obstáculos que exceden el contenido tratado. Explicitar que se trata, menos de aprender las pruebas aceptadas que de poner a prueba las que cada uno concibe.
- los alumnos no logran distinguir posibles confrontaciones en su lógica de significaciones respecto de la que emerge de las enunciaciones del docente. Es el docente el que corre con el “gasto retórico” o con la presentación de problemas o preguntas para lograr que cobren entidad los obstáculos (personales, epistemológicos, didácticos...) que sólo al evidenciarse pueden ponerse en cuestión; a través de interrogantes que válidamente interpelen de un modo u otro, al error.

  De más está decir que hay temas y modos de abordarlos que son más permeables que otros y que la experiencia en múltiples situaciones y la variedad de prácticas, pueden ser variables de alto impacto sobre el aprendizaje.
- el alumno no se involucra en el seguimiento de las enunciaciones del docente sea porque no hacen pie en su posibilidad de atribuirles algún sentido (mucho menos contrastarlas con eventuales significados personales que podrían resultar afectados); sea porque está “defendiendo” algún significado personal que percibe podría estar siendo acometido y del que no está en condiciones de prescindir. Porque pudiera ser académicamente considerado erróneo pero le permite salir airoso al procurarle con cierta presta certeza, soluciones “convenientes” hasta frente a desafíos complejos (manteniendo su representación de sí como ejecutor eficaz) y dar consistencia a la lógica de sus prácticas.

  Se produce la clásica escisión (de la que los docentes de todos los tiempos nos lamentamos), de la atención del estudiante... que oye pero no compromete su escucha, es capaz de repetir lo que se le dice pero no de acudir al contenido para cruzarlo con su lógica de significados. Es decir, acata escolarizadamente sin conciencia de la impostura implicada, en muchos casos.

  El estilo de discurso vertical, de malla cerrada (porque está hecho sólo para establecer verdades), que avasalla con su exceso de puras certezas “indiscutibles”, puede no estar brindando el mejor espacio de oportunidad para poner en cuestión la compleja estructura de intuiciones y creencias de alumno alguno. Acaso las versión de algún compañero en su explicación de recreo sí habilite la negociación de significados, sin embargo.

  Quizá el tono entusiasta que se dirige con cierto simpático convite a los estudiantes para que se pongan a prueba las enunciaciones y se desenvuelve apelando a cierto humor, incluso, podría tentar con más eficacia.

  Sobre todo, cuando se percibe cierto respaldo del docente a lo largo de ese tránsito en que es necesario tolerar la ambigüedad temporal del significado, la crisis de sentido. Sin duda, la suerte que corra quien se anime, al menos, con la primera pregunta, signará el desenvolvimiento posterior y puede tener efecto multiplicativo.

Los genuinos intercambios entre docente y alumno permiten explicitar teorías matemáticas y ponerlas a prueba. Un proceso de prueba se construye en una dialéctica de la validación que conduce al alumno a apelar a cierta retórica espontánea, es decir, defender con argumentos aquello de lo que no está tan seguro y, renunciar a ellos cuando se manifiesten contradictorios o insostenibles.

Cierto tipo de problemas son, en más de un caso, la mejor alternativa para ayudar a los estudiantes a desafiar sus obstáculos, incluso a superarlos. Así, los problemas en relación con el encuentro desde el conocimiento y con el surgimiento de los obstáculos personales de los estudiantes ante un saber son medulares en el diseño de situaciones didácticas que van desde la preparación de la clase a la de las evaluaciones; de los problemas de distinta función a los contenidos y propuestas de examen.

Tienes un e-mail

Paulatinamente, se extiende la costumbre de algunos profesores de ofrecer su correo electrónico para anotar eventuales consultas que pudieran surgir al estudiar “para el examen”. Esta alternativa, la ***telecomunicación,*** promueve el diálogo dado que, por lo pronto, en este entorno es habitual:

- exponer el proceso de producción, a consideración de los otros y es completamente legítimo que circulen sucesivas versiones, en las que se van superando errores, de un “trabajo en marcha” (más que un objeto, es un concepto propio de este encuadre el denominado “work in process”)
- apelar a la manifestación subjetiva que “marca” el texto de los mensajes con “emoticones” (que explicitan lo que en el intercambio verbal presencial sólo se meta-comunica), al humor incluso, en la aceptación de las dificultades que se enfrentan.

Se facilita así la participación de quienes no sólo reciben respuestas sino que envían y reenvían y modifican los textos en cada mensaje y se abre un espacio para los intercambios creativos y creadores de nuevas perspectivas de sentido.

Decretando Problemas Compartidos

La práctica matemática en el aula es un ***proceso de matematización compartido*** que define una subcultura específica para ese docente, alumnos y esa aula (Bauersfeld). Las normas socio-matemáticas son específicas de los aspectos matemáticos de la actividad de los estudiantes. Su importancia reside en que el desarrollo del razonamiento y los procesos de dotar de sentido desarrollados por los estudiantes no puede escindirse de su participación en la constitución interactiva del significado matemático.

Al pretender enunciar pautas para guiar el proceso de evaluación lo vinculamos a referencias básicas que se conectan con criterios generales de media y de futuras pruebas de acceso a la universidad. Los criterios de evaluación del cuadro “Decreto” constituyen una información clave (que aporta aspectos a tener en cuenta antes de determinar el tipo y grado de aprendizaje alcanzado) y están relacionados con estrategias metodológicas y de organización de la acción docente.

1. La evaluación como actividad indagadora

Toda aproximación a la evaluación se vincula a la revisión crítica de planteos previos, concepciones y tradiciones. En cada escuela hay que clarificar cómo se someten al proceso evaluador criterios, prioridades y valoraciones, y cómo se establecen conexiones con el Proyecto Curricular y contenidos mínimos.
Existe una tradición de evaluación basada en exámenes y pruebas de recuperación, sobre los que descansa la mayor parte del peso de la evaluación de matemática en media, cuya función principal es calificadora. Así, los exámenes se convierten en fines y prácticamente únicos medios de calificación; los alumnos enfocan todos sus esfuerzos, estudian y dosifican el trabajo para ***pasar los exámenes***.
De este modo definen y desarrollan estrategias de *supervivencia escolar* que en muchos casos perjudican el proceso de enseñanza y aprendizaje de matemática.
La puesta en práctica de otros instrumentos (como el Inter.-juego de cuadernillos y carpetas en revisión de las tareas realizadas, por ejemplo) ayuda a compatibilizar dos finalidades que suelen entrar en conflicto: promover la comprensión de ideas matemáticas situadas en actividades matemáticas genuinas (en tanto se establezca compromiso de docentes y... ¡ estudiantes!) y que los alumnos superen exámenes.
Para afrontar la evaluación en matemática como actividad valorativa e indagadora es necesario distinguir (tratando de hacer compatibles) el acto administrativo de evaluar o calificar y el proceso natural y legítimo de dar respuesta a las preguntas: *¿qué estamos enseñando? ¿cómo estamos enseñando? ¿qué aprenden los estudiantes? ¿para qué les sirve lo que aprenden? ¿es coherente, eficaz y válido nuestro trabajo?.*
Incorporar estos planteos a la práctica habitual enfatiza el carácter diagnostico y se propone el estudio y elaboración de instrumentos que ayuden, por un lado, al análisis sistemático (y periódico) del contenido de la evaluación y, por otro, a concretar los criterios establecidos.

2. Carácter diagnóstico de la evaluación

El **carácter sumativo-calificador** de la evaluación tiende a recabar información de cada alumno que permita saber si ha entendido o incorporado los contenidos de modo adecuado, aplicar lo aprendido a otras situaciones en otros contextos y/o si están capacitados para pasar de curso. Pero la evaluación no se reduce sólo a una medida del *grado en que el alumno se acerca a lo que el docente espera*. Además tiene **carácter diagnóstico- formativo** que está dirigido a conocer el estado de conocimientos de cada alumno tras un periodo de formación, identificando errores y obstáculos para tomar medidas remediales.
Un diagnóstico inicial permite conocer ciertos aspectos antes de enfrentar a los alumnos a nuevas situaciones de aprendizaje. Por ejemplo qué saben sobre algún determinado concepto o procedimiento, qué aspectos de resolución de problemas resultan más difíciles o a qué se debe la falta de confianza a la hora de trabajar en matemática. Todos son datos esenciales para tomar decisiones según las características del grupo-clase.
Este "diagnóstico" requiere "escuchar" efectivamente a los estudiantes, formulando preguntas que permitan poner en juego sus conocimientos funcionales efectivos a través de interrogantes que no puedan responderse vía la mera rememoración de una definición o técnica. Si de lo que se trata es de establecer el punto de partida, conviene que sepamos claramente en qué terreno estamos "jugando", no hacia dónde podemos "forzar" respuestas acorde a lo correcto o a nuestras expectativas.
Reproduciendo secciones de investigaciones realizadas, consideremos los siguientes ejemplos, no para establecer el estilo propio del trabajo de investigación como homólogo o modelo de la evaluación diagnóstica sino para destacar los verdaderos "indicios" que se recavan tan pronto como nos disponemos a una genuina "escucha" de los estudiantes[8]:

De Panizza, Sadovsky y Sessa sobre una investigación realizada desde 1994 a 1996:
A los alumnos de cuarto y quinto año (16-18 años) –que en la Argentina significa que ya han estudiado ecuación de la recta y sistemas de ecuaciones lineales– se les solicitaba que propusieran una solución de la ecuación $3x + 2y = 7$. El 90 % de los alumnos no pudo obtener ninguna solución de la ecuación. El 10% restante utilizó un procedimiento en ese momento sorprendente para nosotras: agregar otra ecuación lineal y resolver el sistema resultante[9].

De Kieran, Filloy Yagüe, a propósito de las ecuaciones sobre investigación de 1989:
A partir de preguntas similares a las incluidas en la investigación previa, se llega a presumir, analizando las respuestas, que las concepciones primitivas de los estudiantes de lo que es una ecuación no contienen, en general, la idea de que tengan términos literales a Las ecuaciones de ese estilo carecen de sentido a la vista de la presunta concepción ingenua de una ecuación como un hecho numérico ligeramente disfrazado con la falta de algún componente.

Catherine Sackur y Maryse Maurel (de GECO-IREM - NICE) Teresa Assude (de DIDIREM PARIS)
Association de Recherche pour la Didactique des Mathématiques.
Problema para una de las clases (Seresine) : **Resolver algebraicamente la inecuación para *a* entre [-29;58],**
$4a^2-1 < (2a-1)(7a+2)$
La factorización $4a^2-1-(2a-1)(7a+2) = (2a-1)(-5a-1)$ y ciertas manipulaciones posteriores lleva a un juego de soluciones:

---

[8] Se puede consultar también, evaluaciones que en tareas de investigación sobre errores realizó en su medio, Marcel Pochulu.
[9] La propuesta de enseñanza usual en que el álgebra se introduce en primer año de media, a través de ecuaciones de primer grado con una incógnita y el conjunto de tareas asociadas que los alumnos realizan, aparentemente no confronta con la concepción que parecen elaboran según la cual la ecuación es una igualdad numérica y las letras son números a "develar" Aunque no obvia, la influencia de esta concepción en la comprensión de otros objetos de enseñanza que aparecen más adelante puede especularse: obstáculo a la hora de atribuirle algún sentido genuino a la "función por las dificultades en el tratamiento de objetos algebraicos con infinitas "soluciones" o con varias. Se podría desprender que van a enfrentar un conflicto (o huida a la "algoritmización" o al "tecnicismo") frente a los sistemas de ecuaciones lineales (a menos que se lo asuma como dos igualdades numéricas que se cumplen para un par de números desconocidos, a develar) o en el trabajo con la "herramienta" y el "objeto" función lineal (salvo que asumieran la ecuación de la recta como mera etiqueta del dibujo de una recta).

*S*1 = [-29;-1/5[∪]1/2;58] y
*S*2 =]-1/5;1/2[
Problema para otra clase (CESAME): Resolver la inecuación: 3/*x*>*x*+2. - Todos los métodos son válidos.
Del mismo modo, se obtiene dos juegos de soluciones sea algebraica como gráficamente en CESAME.
En ambas clases, la de Seresine y la de CESAME[10], se registraron los siguientes errores que llevaron a una solución incorrecta:
Si *a*<*b* entonces *ax*<*bx*,
Cuando aparecen los dos juegos de soluciones, el docente de Seresine no les deja tiempo para reaccionar. El hecho lo "exaspera"... ¡los estudiantes admiten que puede haber dos sistemas diferentes de solución al haber empleado dos métodos diferentes!. Él docente no les deja este problema y su solución a los estudiantes. El conocimiento sobre la unicidad de la solución no es parte de la propuesta didáctica para el profesor de Seresine. Supone que los estudiantes YA deben tener este conocimiento, básico, casi meta-matemático... tan elemental que nadie necesita hacerse cargo de enseñarlo porque los estudiantes YA deben saberlo.
En CESAME, los estudiantes tienen tiempo para confrontar sus soluciones, y cada uno intenta defenderla. En grupos pequeños, experimentan y corrigen el "sistema de soluciones". Entonces, sobre el final de la clase, el profesor explicita el conocimiento sobre la unicidad del sistema de soluciones y el hecho de que la regla correcta es necesaria si una desea solucionar correctamente una desigualdad.

Conclusión: Los profesores tienen que saber respecto del "otro conocimiento", que es necesario aprender para hacer matemática, este tipo de conocimiento, que puede también ayudar a corregir ciertos errores resistentes, suele quedar implícito en clase.
Tiene que ser detectados y luego superado a lo largo de una actividad matemática con fines didácticos. Así, si bien deben ser enseñado abiertamente, no puede enseñarse del mismo modo que las definiciones o teoremas. Hemos intentado demostrar cómo fueron susceptibles de enseñanza y de aprendizaje en el ejemplo de la clase de CESAME (que además, resultó provechosa más a largo plazo).

Más allá del modo que adopte la calificación, interpretación de resultados y comentarios sobre destrezas/ dificultades o aciertos / errores más destacables, la evaluación permite a los alumnos tomar conciencia de sus progresos e interpretarla como información que orienta su trabajo de cara a nuevas oportunidades. La incorporación del carácter diagnóstico a las "pruebas" supone un estilo de corrección donde no sólo se destaca lo erróneo y mal hecho sino también los aciertos / progresos y su valor.
El error no sólo queda indicado con un tachado o merma de puntuación sino acompañado de una nota informativa donde se lo precisa así como su tipo, orden y gravedad o, eventualmente, clave para la devolución en la puesta en común, avanzando en una dimensión formativa y no sólo sancionadota.

3. Errores y obstáculos en matemáticas

El tratamiento de errores[11] articula con concepciones sobre aprendizaje. Entendido como proceso de re-equilibración tras "disturbios" de "novedades" sobre previos esquemas de conocimiento, el error juega un papel decisivo.

---

[10] El propósito de la lección de Seresine es saber qué conocimiento ponen en juego los estudiantes para solucionar desigualdades y controlar su trabajo. El propósito de la clase en CESAME es hacer que los estudiantes superen sus conocimientos incorrectos sobre desigualdades y aprendan al mismo tiempo un cierto "otro" conocimiento, adicional y necesario para hacer matemáticas.
[11] En este párrafo nos referimos tanto al "error por acción" como "por omisión". Así, consideramos ***error*** no sólo a la manifestación de un resultado, operación, proceso o tratamiento incorrecto en relación con un conocimiento o contenido matemático sino a la evidencia de incompleta distinción (o llanamente falta de distinción) de lo que es propio de una operación, operación, proceso o tratamiento de una noción en relación con un conocimiento u objeto del saber matemático en lo funcional o conceptual. Por ejemplo, un tratamiento puramente geométrico de un concepto como la función en matemática o su trivialización al asimilarlo a mera serie de pares ordenados, podría patentizar un error más complicado de remontar porque puede avanzar sordamente tanto para el docente como para el estudiante. El estudiante, a veces incluso el docente, no llega a observar siquiera cuál es la diferencia en juego entre lo que se le ofrece y lo que asimila sin conflicto aparente de adaptación... justamente porque el umbral del eventual conflicto se mantuvo tan imperceptible que no requiere

Respecto del contraste entre estado de esquemas previos de conocimiento e imposición de la "novedad", el error es indicio para evitar que el desajuste no implique una brecha imposible de saldar y aún así resulte efectivo desafío que ponga en evidencia la inadecuación de las resoluciones provistas por recursos previos.

Recreando libremente a E. Fischbeim, podríamos considerar que en toda ocasión intentamos preservar nuestros recursos prácticos (sobre todo los que, como la intuición, aportan presteza hasta en situaciones que involucran complejidad) por saberlos adecuados para resolver lo cotidiano; nos permiten mantener una imprescindible autoestima que nos hace sentir aptos para salir de atolladeros, portadores de repertorio de herramientas que pueden sacarnos de apuros así como hacernos capaces de lidiar efectivamente con lo diario en un mundo complicado. Cuando lo que se nos propone para enfrentar o resolver en la clase pone en jaque esta posición porque dada su dificultad o trivialidad no nos permite ejercer con nuestros genuinos medios atribución alguna de sentido (ni de significado ni de acción), le evitamos el conflicto a la conciencia y apelamos al modo más económico de saldarlo:: escindimos su resolución de la puesta en cuestión de nuestros preciados recursos.
Buscamos como salir airosos con la mayor economía adoptando, por ejemplo, la "vía conforme". La vía conforme es la de acatamiento de lo que se nos *dice* (o meta-comunica) "hay que hacer"[12] (repetir una definición, seguir las indicaciones de una tarea de complicación pedestre, reproducir una técnica, repasar un algoritmo...), escindiendo de esa acción alienada, la puesta en juego de los recursos con los que podríamos otorgarle sentido.
Tal escisión de los recursos que permitirían una genuina atribución de sentido a la acción o práctica (al poder regularla según el ejercicio de control que nos habilitarían), es un mecanismo que, según Fischbeim, los protege, a fin de preservarlos, en el mejor de los casos, para actividades y desafíos para las que los ritos... poco sirven. En el peor de los casos, padeciendo su enajenación más íntegra.
Asumimos el interés del estudio sobre errores para la puesta en práctica de tareas docentes tendientes a ponerlos en evidencia y superarlos. Algunos investigadores (como J. Centeno y M.M. Socas) hablan de obstáculos al modo de Bachelard, para referirse a que los alumnos manifiestan ciertas resistencias procedentes del aprendizaje de algún concepto o del esquema previo que en el nivel precedente tenía su coherencia y proporcionaba éxitos, pero ahora se muestra falso o inadaptado.
Por ejemplo, en el aprendizaje de sistemas numéricos durante un periodo (aritmética con naturales) los estudiantes entienden que multiplicar siempre aumenta las cantidades Esta creencia, que funciona en ciertos niveles, puede constituirse en obstáculo para entender la multiplicación con decimales.

La superación de errores, obstáculos y dificultades irá acompañada de:

- t un repertorio de actividades *ad hoc...*
    - que promuevan el ejercicio de la crítica y la autocrítica,
    - al crear condiciones que favorezcan la recuperación del repertorio de herramientas propias de los estudiantes, enriquecidas con los conocimientos articulados con saberes matemáticos,
- así como de la identificación del error...
    - que deviene observable al contrastar el resultado de nuestras acciones dentro de un medio y no sólo las acciones en si contra la "norma" (sobre toda la enajenada "norma" del acatamiento por "vía conforme").

Para confeccionar estas tareas se acompaña una clasificación de errores y dificultades según su procedencia y se les ofrece una serie de propuestas para criticar y someter, de valer la pena, a rediseño.

adaptación al no provocar apreciación de desajuste. Todo se vehiculizó con tanta "naturalidad" en asimilación de un concepto previo que hasta puede parecer inicialmente, todo un "éxito pedagógico" para el docente... como no fuese el "fracaso de un éxito"... parafraseando a la calificación de ciertos encuadres de pasaje de la aritmética al álgebra según investigadores de didáctica de la matemática (ver documentos referidos a "Cómo Buscarse un Buen Problema" de LMS).

[12] Aceptamos eso... "lo que hay que hacer" como se aceptan ciertos rituales (sobre todo los luctuorios) con los que procedemos porque "no podríamos hacer otra cosa" (parafraseando a Bourdieu).

Categorías para diagnóstico de dificultades

* Comprensión lectora
* Dominio de técnicas y estrategias
* Expresión oral y escrita
* Actitudes (propias de las matemáticas)
* Razonamiento
* Dominio cognitivo específico (conceptual y procedimental)

Dificultades - Errores

Se resume un análisis y clasificación de errores según aportes de N. Movshovitz, O. Zaslavksy y S. Invar. (véase L. Rico, 1995).

Tipificación de errores

1. Datos mal utilizados
Entre ellos destacan los errores que proceden de añadir datos extraños, olvidar alguno necesario, asignar a una parte de la información a un significado inconsistente con el enunciado, utilizar valores de una variable para otra distinta o hacer una lectura no consistente del enunciado.
2. Interpretación incorrecta del lenguaje matemático
Son errores debidos a una traducción incorrecta de hechos descritos en lenguaje simbólico o gráfico.
3. Inferencias no válidas Errores imputables al razonamiento sobre el contenido específico, como concluir de un enunciado condicional su recíproco o contrario, de un enunciado condicional y de su consecuente deducir el antecedente, usar e interpretar incorrectamente cuantificadores, negar erróneamente un enunciado o dar saltos injustificados en una inferencia lógica (ver R.S. Nikerson).

1. Utilizar números racionales e irracionales para presentar e intercambiar información y resolver problemas y situaciones extraídos de la realidad social, de la naturaleza y de la vida cotidiana.	1. Utilizar el lenguaje matricial y aplicar las operaciones con matrices como instrumento para el tratamiento de situaciones que manejen datos estructurados en forma de tablas o grafos.
2. Transcribir problemas reales a un lenguaje algebraico, utilizar las técnicas matemáticas apropiadas en cada caso para resolverlos y dar una interpretación, ajustada al contexto, a las soluciones obtenidas.	2. Transcribir un problema expresado en lenguaje usual al lenguaje algebraico y resolverlo utilizando técnicas algebraicas determinadas: matrices, resolución de sistemas de ecuaciones lineales y programción lineal bidimensional.
3. Reconocer las familias de funciones más frecuentes en fenómenos económicos y sociales, relacionando sus gráficas con fenómenos que se ajusten a ellas, interpretar situaciones presentadas mediante relaciones funcionales expresadas en forma de tablas numéricas, gráficas o expresiones algebraicas.	3. Analizar cualitativa y cuantitativamente las propiedades locales (límites, crecimiento, derivada, máximos y mínimos) de una función que describa una situación real extraída de fenómenos habituales en las ciencias sociales.
4. Utilizar tablas y gráficas como instrumento para el estudio de situaciones empíricas relacionadas con fenómenos sociales y analizar funciones que no se ajusten a ninguna fórmula algebraica y que propicien la utilización de métodos numéricos para la obtención de valores no conocidos.	4. Utilizar el cálculo de derivadas como herramienta para resolver problemas de optimización extraídos de situaciones reales de carácter económico y sociológico.
5. Distinguir si la relación entre los elementos de un conjunto de datos de una distribución bidimensional, es de carácter funcional o aleatorio y extraer conclusiones de tipo cualitativo a partir de su representación.	5. Asignar e interpretar probabilidades a sucesos aleatorios simples y compuestos (dependientes o independientes) utilizando técnicas de conteo directo, diagramas de árbol o cálculos simples.
6. Interpretar, utilizando el coeficiente de correlación y las rectas de regresión, situaciones reales definidas mediante una distribución bidimensional y la posible relación entre sus variables.	6. Planificar y realizar estudios concretos partiendo de la elaboración de encuestas, selección de la muestra y estudio estadístico de los datos obtenidos para inferir conclusiones, asignándoles una confianza medible, acerca de determinadas características de la población estudiada.
7. Utilizar técnicas estadísticas elementales para tomar decisiones ante situaciones que se ajusten a una distribución de probabilidad binomial o normal, calculando las probabilidades de uno o varios sucesos.	7. Analizar de forma crítica informes estadísticos presentes en los medios de comunicación y otros ámbitos, detectando posibles errores y manipulaciones en la presentación de determinados datos.
8. Organizar y codificar informaciones, seleccionar estrategias, comparándolas y valorándolas, para enfrentarse a situaciones nuevas con eficacia, y utilizar las herramientas matemáticas adquiridas.	8. Aplicar los conocimientos matemáticos a situaciones nuevas, diseñando, utilizando y contrastando distintas estrategias y herramientas matemáticas para su resolución.

Tabla de Criterios de Evaluación/Decreto

4. Teoremas y definiciones deformados

Por ejemplo la aplicación de un teorema sin las condiciones necesarias, abusos de la linealidad de funciones (sen (x+y) = sen x + sen y), valoración o desarrollo inadecuado de una definición.

5. Falta de verificación en la solución

Errores que podían haberse evitado si el resolutor hubiese contrastado la solución con el enunciado.

6. Errores técnicos

Se incluyen los errores de cálculo, en la manipulación de símbolos algebraicos y ejecución de algoritmos. Este análisis también se dirige a establecer puntos

a) $2^{(x+3)} = 16;\ \ 2^3 + 2^x = 16;\ \ 8 + 2^x = 16;\ \ 2^x = 8;\ \ x = \log_2 8;\ \ x = 3$

b) $2^{(x+3)} = 16;\ \ 2^3 \bullet 2^x = 16;\ \ 8 \bullet 2^x = 16;\ \ 2^x = \frac{16}{8}\ \ 2^x = 4;\ \ x = 2$

de referencia que informen al proceso evaluador y ayude a definir criterios de calificación de pruebas o exámenes escritos de matemáticas que incorporen un tratamiento diferenciado de errores. Estos criterios acompañarán un sistema de “penalización” en función de la “gravedad” del error. En definitiva se aboga por la incorporación de una tipificación diferenciada de errores a los esquemas de puntuación parcial de las pruebas. Este método aumenta la uniformidad en las puntuaciones de una misma prueba por diferentes calificadores. Se presentan dos desarrollos analíticos con errores: ¿Deben calificarse del mismo modo?

4. Otros elementos calificadores

En el proceso evaluador se distinguen datos (información que se recoge de los alumnos: intervenciones, producciones), resultados (interpretación que los docentes hacen de la información: ponderación, codificación, puntuación, etc.) y decisiones metodológicas (que se toman a partir de la valoración que se hace de esta información recogida).

Evidentemente una decisión estará más justificada cuanto más variados sean los instrumentos y los datos recogidos. Siguiendo a L. Stenhouse (1984) se enfrentan dos modelos de evaluación: por un lado los de puntuación, basados en exámenes y pruebas escritas, donde un número promedia y expresa los rendimientos, y por otro lado los críticos, basados en el juicio del profesorado, huyen de la calificación numérica y usan exclusivamente procedimientos cualitativos. Entre estos dos extremos, existe una amplia variedad de actitudes que se describen mediante un continuo. (figura)

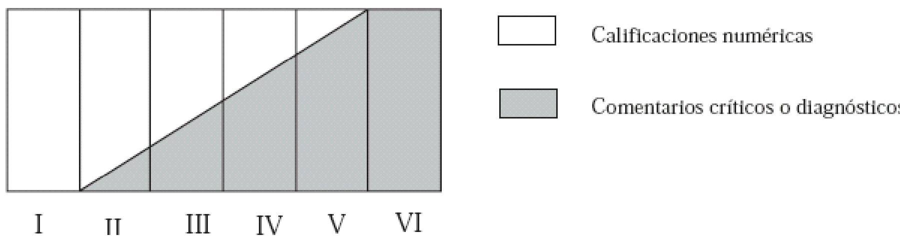


Diagrama del continuo Cuantitativo-Cualitativo

En evaluación en media se trata de equilibrar la calificación y valoración cualitativa y diagnóstica de dificultades y progresos (zona central de la figura). Para ello conviene delimitar claramente el uso de los instrumentos y el valor que se les otorga en un proceso que cuente con la opinión y expectativas de los estudiantes y conciba la evaluación en función de objetivos de currículo y no al revés. Mantenerse en la zona central de la figura requiere además avanzar en una doble dirección: por un lado enfatizar nuevos aspectos esenciales de la formación matemática (actitudes, procedimientos y métodos matemáticos) destacándolos como aprendizajes fundamentales cuya valoración es más cualitativa; y por otro lado, incorporar instrumentos de evaluación que favorezcan de la observación de los procesos de aprendizaje en clase.

5. Técnicas e instrumentos

Para elaborar de instrumentos de evaluación se enumeran una serie de requisitos a modo de criterios.

Adaptación a las posibilidades reales La evaluación requiere su tiempo, sin embargo no se debe complicar excesivamente la labor docente con la evaluación ni dedicar demasiados esfuerzos añadidos en detrimento de otras tareas como programación, preparación de actividades, gestión de la clase, coordinación de trabajos de los alumnos, etc. El tiempo dedicado a la evaluación diagnóstica genera nuevas necesidades para elaborar materiales. El equilibrio se impone. El tiempo necesita compartirse dentro de otros espacios para la programación y confección de nuevas actividades.

Determinación previa de los aspectos a evaluar. No se puede ni pretende evaluar todo analíticamente. Los aspectos a evaluar deben desarrollar los criterios de evaluación anotados en la tabla previa y no perderán de vista los distintos niveles de profundización y aproximación a soluciones de un problema.

Esquematización explícita

La elaboración de esquemas de calificación y ponderación paralela al diseño de instrumentos y pruebas, ayuda a reducir una cuestión tan compleja a dimensiones manejables.

Coherencia La evaluación debe ser coherente con los objetivos del currículo, los contenidos y el énfasis puesto en cada una de las partes, con el desarrollo en clase y con los métodos docentes. Este criterio, por obvio, no pierde su importancia. Cuando se decide evaluar un aspecto, previamente habrá sido considerado y destacado en contenidos y metodología de trabajo. Por ejemplo para evaluar la formulación de conjeturas y elaboración de hipótesis deben aparecer en las tareas situaciones que pongan a prueba este tipo de habilidad. Con planteamientos meramente deductivos de la asignatura, mediante problemas estandarizados y de respuesta única (donde no esté reconocida la importancia de la experimentación, o el probar qué pasa en determinadas condiciones), pretender evaluar este aspecto es una impostura. La evaluación se refiere a los objetivos marcados, con contenidos empleados.

5.1. Preguntas orales

(Contextos: exposición, discusión, entrevista y conversación) El docente hace preguntas en multitud de situaciones: durante su exposición en clase, en la discusión en gran grupo, en intervenciones de los estudiantes (espontáneas o provocadas), en conversaciones reducidas o entrevistas personales.

La pregunta del profesor es un elemento clave a la hora de reconducir actividades y evaluar a los alumnos. Tradicionalmente el profesor hace “pasar al pizarrón” a un alumno, como medio de seguimiento de sus aprendizajes, y ha dirigido esta actividad mediante preguntas intencionadas.
Relacionadas con alguna tarea pendiente o con lo que se está trabajando. El uso intencionado y sistemático de la pregunta oral aporta más información que la mera apreciación intuitiva y global de una intervención en el pizarrón para “poner nota”.

5.2. Observación del trabajo en clase y de las tareas
La observación en clase es necesaria para disponer de un tipo de información sobre la enseñanza y el aprendizaje de matemática que difícilmente se puede conseguir por otros medios como en la evaluación de las actitudes, el uso adecuado de los recursos y del propio programa. La observación de las tareas, siquiera esporádicamente, aporta datos complementarios sobre procedimientos de estudio y le dan a la carpeta y a los cuadernillos una posición clara dentro de los parámetros compartidos de evaluación.

5.3. Exámenes escritos
Las pruebas escritas habitualmente exigen responder una serie de preguntas en tiempo muy limitado. Una pregunta que plantee un verdadero problema requerirá demasiado tiempo para que el alumno medio pueda responder correctamente en el término habitual de un examen. Por tanto, los exámenes de matemáticas habituales exigen mayoritariamente, uso *reproductivo* de una información aprendida o la circunscripción a un problema. Si no se toman las medidas oportunas, la principal capacidad que seguirán midiendo los exámenes es la de aprender de memoria o resolver problemas por analogía. La adquisición de este tipo de información tiene un propósito pero, desde la práctica y mediante nuevas orientaciones de los exámenes, hay que dejar claro que no es el único ni el más importante.
Puede gestarse un proceso que permita apreciar el estado de conocimientos matemáticos de los alumnos (en diferentes momentos del año y de su recorrido), pensando en una evaluación de propósitos más diversificados:

- la planificación, el ajuste y reorientación del proyecto de enseñanza
- la información a cada alumno de sus logros y sus dificultades
- la conformación de grupos de trabajo,
- el análisis de los progresos de cada uno,
- la información a los padres.

Se concibe la evaluación como un momento singular del trabajo plausible de producir aprendizaje y no como un mero punto final de un proceso. Se asume como un principio básico que –sin negar las diferencias individuales- todos los alumnos están en condiciones de avanzar en sus aprendizajes matemáticos.

5.4 La recuperación de los conocimientos matemáticos que poseen los alumnos
El álgebra y la entrada en el razonamiento deductivo son ejes centrales del trabajo que marca el paso a nivel medio y se extiende como recurso de modelización que resultará imprescindible en la continuidad de los estudios. Como es dable anticipar una diversidad de “posiciones” de sus alumnos frente a estos dos grandes temas, conviene establecer estrategias de recuperación del trabajo previo de los alumnos que estimen una eventual diversidad cognitiva de altos contrastes entre los alumnos.

5.5 Problemas específicos

5.5.1.. Los conjuntos numéricos y las propiedades que los caracterizan

- Acerca de los números reales

Revisando las propuestas que se anotan en los Anexos, se podrían seleccionar las que apuntan a dar sentido a los números reales desde la contextualización?

Vale la pena considerar, las que, desde la enseñanza, asumen las concepciones de los alumnos que no distinguen densidad de completitud para cómo generar acciones que las pongan en cuestión.

De los ejemplos, se pueden compendiar los que atienden a las distintas formas de representación de los reales a través de propuestas que presten especial atención al rol que juegan las notaciones y escrituras.

5.5.2. Hacia la adquisición del álgebra como herramienta de modelización

Una forma de contribuir a la consolidación de los sentidos de los objetos algebraicos es focalizar en la enseñanza en la dimensión del álgebra como herramienta de modelización, donde los aspectos algorítmicos -que los alumnos deben necesariamente aprender- sean subsidiarios del objetivo de resolver problemas. Podrían señalarse todos los ejemplos que resultan propicios para la modelización de problemas matemáticos para progresar, intra-matemáticamente, en la posibilidad de representar y secuenciar funcionamientos, procedimientos y relaciones.

5.5.3. Geometría analítica

Es impactante la discontinuidad con que suele presentarse la enseñanza de la Geometría analítica con relación a los conocimientos previos de los alumnos. Por ejemplo, las nociones de recta y de círculo aparecen amalgamadas a las respectivas ecuaciones sin prestar demasiada atención al papel que juegan los teoremas de Pitágoras y Thales - estudiados previamente,- en la forma que adquieren estas ecuación. Podrían producirse medios para la introducción a la geometría analítica recuperando el trabajo ya realizado en niveles previos.

5.5.4. Funciones

Además de seleccionar propuestas que apunten a enriquecer el concepto de función desde cada una de sus formas de representación, vale atender al salto que se opera sobre las funciones a lo largo de la escuela media. Inicialmente la variable funcional interviene en relaciones de operaciones básicas y a medida que avanzamos en la escolaridad, hacemos intervenir a las funciones exponenciales (crecimiento de poblaciones, por ejemplo) y a las trigonométricas (problemas geométricos) para los que no es posible obtener el valor de la función mediante operaciones algebraicas, de modo que se hará necesario pasar de un abordaje y lenguaje algebraico al de las funciones inversas.

Clasificando los acercamientos al estudio del concepto de función de acuerdo a la consideración de situaciones efectivas, se tiene que: 1) se realiza principalmente en el ámbito matemático; 2) se enfatizan los problemas de aplicación; 3) se presenta la relación entre el concepto matemático y la modelada situación correspondiente.

Respecto de este último acercamiento, un elemento para su justificación es la posibilidad de que la abstracción se realice a partir de consideraciones más tangibles. Al respecto en Hitt, (1994), se comenta que contextualizar problemas matemáticos es un intento por rescatar las ideas intuitivas precursoras de abstracciones y así reducir obstáculos de aprendizaje. A su vez, este proceso de abstracción se refuerza al tener la posibilidad de ver su aplicación en la situación efectiva. Específicamente, respecto al concepto de función, Thompson (1993), advierte sobre el rol potencial de la concepción de función en apoyo o inhibición en la conceptualización de situaciones por los estudiantes, sugiriendo que puede iniciarse su tratamiento en la introducción al cálculo. En particular, se ha señalado el uso de simulación en la apropiación de conceptos matemáticos cuando la intención es crear un contexto para mostrar la interrelación de la situación efectiva con el concepto matemático para lograr su comprensión. En Hitt, (1994) se señalan características más específicas. Así, se dice que con la simulación se puede ir construyendo a la vez un puente entre ideas intuitivas y conceptos formales, así como un ambiente de experimentación en el aula. Un complemento importante para la implementación de la propuesta parece ser el uso de la computadora. Así, Hitt (1994) advierte que se esta dejando de lado el software de simulación de fenómenos físicos relacionados con conceptos, además, que en situaciones de simulación existen graves dificultades cuando los estudiantes realizan el proceso de matematización al aislar el problema que se esta tratando. Pero que hay mayor posibilidad de reconocer los errores al encontrarse en situaciones intuitivas que están a su alcance. A modo de conclusión señala que: *Sin embargo, en la década pasada y lo que va de ésta, una corriente de investigadores impulsa el uso de la matemática en contextos reales para adquisición de conceptos.*

Para la simulación de fenómenos físicos, el uso de la computadora es un elemento imprescindible para la generación de procesos de matematización y formación de conceptos (ibid, pág. 13).

6. Ejemplos prácticos

En esta sección se concretan mediante ejemplos algunos de los criterios expresados en la anterior.

6.1. Evaluación formativa mediante observación en el aula

Este ejemplo describe una secuencia de actividades de aula donde se ponen en práctica aspectos cualitativos y formativos de la evaluación. Está dirigida a mostrar, en situaciones cotidianas no diseñadas específicamente para evaluar, una forma de valorar conocimientos adquiridos que no se pueden someter a examen escrito, como ocurre con el trabajo matemático con problemas abiertos, proyectos y ciertas propuestas con recursos como calculadoras y computadoras.

Título: **Modelización Ilustrativa**
Niveles: Últimos Años de Media
Introducción En una clase de matemática, en pro de destacar el empleo significativo de las representaciones en una modelización, se presenta un problema que parece simple y puede ser propiciador de debates argumentativos y de puesta en juego de notaciones, esquemas, gráficos... hasta llegar incluso a resultar prácticamente un recurso didáctico.
Los profesores de matemática de los primeros años de la facultad en carreras vinculadas a economía o administración, por ejemplo, conocen las dificultades de los estudiantes en la aplicación de matemática y empleo en modelos de estos campos (como las de cálculo, series y álgebra lineal). En tales situaciones, crecen los obstáculos al sumarse los que derivan de la conceptualización de la disciplina que requiere una representación matemática modelizante a las habituales dificultades de los estudiantes para resolver problemas representados matemáticamente. Por otro lado, llegado cierto nivel de la escolaridad media es conveniente, justamente debido a la anticipación de las dificultades en ciernes para muchos de los que van a proseguir estudios, presentar problemas que pongan en juego la capacidad de modelizar.
Analicemos, al respecto, una situación del tipo de aproximación "mixta" donde tanto los elementos de la aplicación como la modelización promueven la introducción de conceptos matemáticos y, simultáneamente, la propuesta en sí puede considerarse matemáticamente propedeútica porque en el camino de resolución emerge el contenido vinculado a procesos y procedimientos de modelización y se da pie a diversas instancias de evaluación dinámica e integrada al aprendizaje.
Algunas de las características de la actividad la convierten en propicia para poder centrarse en la modelización como objeto de aprendizaje:

- La cantidad de conceptos matemáticos es mínima en esta actividad que es, además, elemental; la complejidad que puede implicarse en ejemplos tomados de la "realidad" se ha evitado así la propia de la conceptualización adicional exigida cuando el problema se toma de otras disciplinas.
- El problema es fácil de entender
- La respuesta que se precisa no puede simplemente, "acertarse" y aún así, es accesible con competencias matemáticas básicas
- Pueden aplicarse diferentes modelos, no necesariamente rigurosos para obtener repuestas parciales o globales, correctas o erróneas
- La situación puede desencadenar diversas consideraciones e hipótesis para establecer un modelo real del problema.

Pasemos al enunciado:

***Agua y Vino**: Tenemos dos copas idénticas, llenas por igual una con agua y ora con vino. Se pasa una cucharita del vino a la copa de agua y a tras completar la mezcla, se toma una cucharita de esta copa para volcarla en la de vino. ¿Consideras que hay más vino en la copa que contenía agua o más agua en la que contenía vino?*

La propuesta sigue el siguiente esquema:
Primera Etapa... *Voto indiscutiblemente personal* (10 minutos)

1. El docente entrega el texto del problema sin comentarios adicionales y les pide a los alumnos que hagan una lectura silenciosa, analicen (4 minutos de plazo) y que cada uno de ellos, sin consultas ni intercambios, anote su opinión personal. Recalca que tienen 10 minutos para expresar su opinión por escrito. (El docente, silenciosamente, sin circular por los bancos, espera y al finalizar recoge las hojas).
2. El docente pide los votos y escribe los resultados en el pizarrón, volcándolos en una tabla en que las columnas son "más vino", "más agua", "variantes", "=". Estas últimas dos columnas son importantes y aunque correspondan a diversos tipos de argumentaciones, no es preciso discutir o distinguir, en esta etapa, las eventuales alternativas que incluyan,
   El docente les pide a los estudiantes que tomen nota del resultado de la votación y su respuesta personal.
3. Pasan a discutirse los diferentes tipos de respuesta con el compañero de al lado (6 minutos)

Segunda Etapa*: Campañas convincentes* (de 20 a 30 minutos)
Se les pide a los estudiantes que escriban una nota o carta a un compañero alejado para intentar convencerlo de su opinión.
El docente circula por los bancos y no dice nada… apenas colabora para que todos hagan los intercambios a tiempo y leen lo recibido.
Repechaje: Nuevamente, cada estudiante vota y el docente anota los nuevos resultados para compararlos con los previos.
El debate**:** Esta es la etapa crucial y la más extensa. Sería ideal poder dedicarle una hora completa. La tarea del docente no es nada simple, porque no se limita a la distribución de turnos para la toma de la palabra, sino que decide cómo organizarlo en términos generales. Por ejemplo, puede ceder la palabra en primer lugar a algún voluntario que pase a defender la posición de "más vino en el agua" o pedir una explicación de su voto a quien marcó optó por "=" o por "variante". La decisión del tipo de orador inicial no es vana, va a influir en el resto del debate. En general, conviene que la iniciativa sea, efectivamente, de un representante de la posición "más vino en el agua" para discutir la aproximación cualitativa en juego.
Otro evidente rol del docente en esta etapa es la de permitir que todos tengan derecho a la palabra y sea escuchado y la de gestionar consenso para desestimar argumentos que no se sostengan en racionalidad aceptable. Por otra parte, decidirá cuál de las argumentaciones, por su importancia, son apropiadas para ser copiadas en el pizarrón, usando los mismos términos literales que los expresados (sin tomar partido, registrando argumentos representativos de todas las posiciones). Cuando se haya llegado al punto clave y el docente considera que la discusión llevó a un acuerdo de suficiente generalidad, resume e institucionaliza los resultados.

La modelización… ¿necesaria?
Puede que inicialmente no se evidencie la necesidad de recurrir a la matemática para resolver el problema. De hecho, el problema no presenta un interrogante claramente "matemático".. Justamente, el enunciado del problema, está deliberadamente despojado de toda notación o "connotación" matemática (como, "dadas las copas A y B" ... o "A y V", en este caso). De este modo, aparentemente, se puede recurrir a un abordaje cualitativo. La respuesta más frecuente en tal caso es: "Hay más vino porque la primera cucharada está llena de vino y la segunda no tiene pura agua". Por supuesto, este argumento pude refutarse señalando que algo del vino se ha devuelto con la segunda cucharada. Generalmente, este tipo de argumentos surgen en la primera etapa del debate (por eso, justamente, conviene que el docente ceda la palabra en primer lugar a los partidarios de "más vino..."). Los estudiantes pueden llegar a sostener una discusión vivaz pero terminarán notando que este tipo de argumento los lleva a un punto muerto y recurrirán al tratamiento o exposición cualitativos, proponiendo diferentes tipos de respuestas que se vinculan a diversos modelos del problema. Una lista bastante exhaustiva, de lo que puede aparecer en las anotaciones de los estudiantes incluye...

• ***Modelos Numéricos***. En estos casos, se le atribuyen valores numéricos a las cantidades de líquido en las copas y en la cucharita.. Esto lleva a operaciones en que fundamentalmente se pone en juego la noción de proporción. Estos modelos pueden ser más o menos generales, por ejemplo, la cantidad de líquido en la cucharita puede ser expresada por un número o por un porcentaje de la cantidad que contiene cada copa. Estos ejemplos, si se operan sin errores, conducen a la respuesta correcta,. Sin embargo, las dificultades inherentes a los cálculos en este contexto pueden derivar en respuestas erróneas. En este sentido, algunas elecciones numéricas pueden ser más desafortunadas que otras. Por ejemplo *1000 ml* para la copa y *10 ml* para la cucharita suele arrastrar a considerar que la segunda cucharada contiene *9 ml* de alguna y *1ml* de vino (error típico con proporciones). Más aún, el error puede estar defendiendo la convicción de quienes comprometieron su intuición en la respuesta “más vino...”. Tal obstáculo (complejamente epistemológico, psicológico...), hasta distorsiona los cálculos en sostén y respaldo de la teoría que parece ordenar significativamente la experiencia.

•***Casos Extremos***. Uno clásico es el de imaginar un “cucharón” que coincide en capacidad con la del contenido de las copas. Es simple la deducción: la primera cucharadota vacía la copa de agua y depara en la de destino, una mezcla de vino y agua en partes iguales que luego retorna en esta proporción a la copa originariamente “de agua”. El otro “caso límite” es la de una cucharadita tan pero tan pequeña que no quita nada de vino de la primera copa para llevarlo a la de agua y tampoco merma la de agua ni altera la de vino. Las copas, entonces, quedan tal como estaban. Estos extremos no resultan realistas y aunque llevan a resultados correctos sin cálculo alguno, no suena verosímil y no tiene poder de convicción positiva (no convence de lo que intenta demostrar pero sí desacredita por la contundencia del contraejemplo, las convicciones erróneas) aunque, posiblemente, el estudiante que elabora este tipo de argumento tenga muy claro el recurso de modelización.

• ***Modelos Gráficos***. Se recurre a una representación icónica de las copas en las sucesivas instancias. Las comprobaciones pueden ser más o menos ilustrativas y/o rigurosas llevando, incluso, a modelizar el agua y el vino por cierta cantidad de bolitas a dos colores, facilitándose así los cálculos de tal modo que no es posible rehuir a la manifiesta falsedad de las posturas erróneas.

Modelos que apelan a letras**.** Este estilo puede mixturarse con el modelo numérico, o incluso gráfico. Emplear letras en los modelos matemáticos está muy bien conceptuado y evidencia su eficacia contundente.

Si se aplica a la cantidad inicial de líquido en las copas como incógnita (parámetro de la situación), la segunda puede expresarse tanto independientemente como en relación proporcional con la primera. El cuadro resume la comprobación, usando *Q* como la cantidad de líquido inicial en las copas y *q* como la capacidad de cada cucharadita:

Etapa	Agua en la copa *A*	Vino en la copa *A*	Agua en la copa *B*	Vino en la copa *B*
Etapa 0	0	Q	Q	0
Etapa 1	0	$Q-q$	Q	Q
Etapa 2	$Qq/(Q+q)$	$Q^2/(Q+q)$	$Q^2/(Q+q)$	$Qq/(Q+q)$

Los cálculos más complicados aparecen en la segunda etapa, para determinar las cantidades de agua y de vino en la segunda cucharada. Es interesante el empleo de álgebra y de proporciones, pero no nos detendremos en este tópico. . Por otra parte, es posible que en respuestas de este estilo, más allá de los posibles errores que se pudieran cometer, pueden presentarse modelos no pertinentes empleando letras. Por ejemplo, un estudiante estancado en el abordaje cualitativo, puedo aportar una solución en que decide llamar x al vino e y al agua, manteniendo a nivel cualitativo el resto de los argumentos. Hay, incluso, modelos mixtos en que las letras tienen una función de rótulo.

Por ejemplo:
"x es el agua e y es el vino… así que tenemos en la situación 1, en que tenemos ∆ iguales, … la cuchara, el nivel de la cuchara, sería un suplemento. Entonces, tenemos una situación 1, donde vertemos la cucharadita de vino en el agua. Lo que hace x más ∆y… Entonces tenemos una segunda situación, donde tomamos una cucharadita de la mezcla para verterla en el vino. Esto es ∆, abro corchetes, x más ∆y,…, más y. entonces desarrollamos…lo que está entre corchetes, lo que da ∆x más ∆ segundo y, … ∆ cuadrado y… más y. Así que vemos que tenemos igual ∆… en la segunda situación, en la segunda copa, que en la primera situación, porque hay ∆y, una cucharadita de y, de vino, y ∆x en la segunda situación, que es una cucharadita de … de agua. Por eso, el suplemento de vino en el agua y el de agua en el vino, coinciden."
Los diferentes modelos propuestos deben discutirse durante el debate, más allá del rigor, la validez del tratamiento matemático y grado de generalidad. Esto es clave en la situación de debate.
Hay, además, otro tipo de discusión, que generalmente sólo aparecen a cierto nivel de la discusión, por lo pronto, después de descartar el abordaje puramente cualitativo. Son cuestiones que se refieren a las hipótesis en relación al problema del "ajuste empírico" entre la situación y el modelo, por ejemplo:
"¿Cómo podemos estar seguros de que inicialmente tenemos las dos copas llenas con la misma cantidad de líquido? ¿Cómo podemos estar seguros de que hay exactamente la misma cantidad de líquido en las dos copas al completar las maniobras, y que no se volcó nada?, "¿Y en la coincidencia de cucharaditas?", "¿Se mezclan por completo el agua y el vino?", "¿Cómo se podría medir la cantidad de vino en el agua o de agua en el vino?".
Además de las cuestiones sobre el empleo del álgebra para resolver el problema, contamos con una rica situación, adecuada para formularse interrogantes sobre la presentación de la modelización a nivel básico. En tal sentido, no sólo es una situación adecuada como punto de partida para poner en cuestión lo que los estudiantes piensan de la matemática sino que, además, puede emplearse lo largo del año como referente de diversas cuestiones en relación a la modelización.
El marco del debate científico es adecuado para generar una discusión suficientemente rica para la emergencia de diferentes tipos de modelos y de interpelaciones al respecto. El docente dirige el debate, haciéndose responsable de la validación e institucionalización del resultado de conclusión.
Más allá de ulteriores análisis didácticos, vale decir que hay una solución muy elegante y sintética del problema que no requiere cálculos y uso de proporción. Además, esta solución funciona incluso si no hubiera la misma cantidad de líquido inicialmente en sendas copas y hasta en el caso de no ser mutuamente solubles los líquidos. Podemos tener distinta cantidad de agua y aceite, por ejemplo.
De hecho, en la segunda cucharadita, ambos líquidos pueden presentarse de modo que hay menos agua pero la pequeña cantidad de agua (llamémosla q') es exactamente la misma cantidad de vino (o aceite) "devuelta", lo que significa que en la copa de vino (o aceite) hay q-q' de agua y en la copa de agua hay también q-q' de vino (o aceite)! Esta solución puede presentarse a los estudiantes pero recién después de completar la secuencia, sea que derive de uno de los "ponentes" del debate o que la exponga y explique el docente.

Título: **Simulaciones**
Niveles: Bachillerato de Humanidades y Ciencias Sociales (Primer Curso)
Introducción En una clase de matemática con computadoras, la relación habitual es de 3 ó más alumnos por equipo. Esta circunstancia obliga al profesor a facilitar la variedad, diversificación de tareas y a trabajar con diferentes grados de profundización. Admitiendo que existen distintos niveles de partida es imprescindible idear tareas que permitan el progreso de todos de varias formas y a distintos ritmos. Un objetivo primordial es garantizar que las actividades sean compartidas significativamente.
Las intervenciones del profesor deben dirigirse a asignar papeles en los grupos impidiendo el aislamiento de los menos conocedores y haciendo compatible su avance con el de los preparados. Quienes poseen ciertas nociones, parte de las cuales ya se olvidaron, tienen un papel importante que jugar. Recordando y compartiendo sus conocimientos favorecen un ritmo de trabajo que conecta los conocimientos mínimos y máximos de cada grupo. En la organización de clase conviene que intervenga el profesor en la formación de los grupos para garantizar el ajuste en los grupos.

<u>*Breve descripción*</u>
Estudio experimental de distribuciones de probabilidad. Comparación entre distribución de probabilidad y la de frecuencias relativas. Aproximación experimental de la distribución binomial a la normal mediante la simulación de experimentos vía planilla de cálculo.
Ubicación: Unidad de trabajo «Distribuciones de Probabilidad»
Objetivos de las enseñanzas: Establecer dinámicas de trabajo activas y experimentales. Favorecer el contacto con las nuevas tecnologías. Mejorar estrategias metodológicas para coordinar una clase de matemática con computadoras.
Objetivos de los aprendizajes
Profundizar en el conocimiento de las posibilidades de uso de planilla de cálculo. Simular fenómenos aleatorios. Elaborar automáticamente tablas de frecuencias. Confeccionar gráficos estadísticos. Profundizar nociones de distribución de probabilidad teórica y experimental. Reconocer la aproximación experimental de la distribución binomial a la normal cuando el número n es grande.
Materiales Computadoras, planillas de cálculo (versión avanzada), archivos *ad hoc* y pizarrón
Evaluación
1. Conocimientos previos: Cierta familiarización con la planilla de cálculo en versiones relativamente avanzadas: llenar celdas, usar variables, conocer algunas fórmulas matemáticas (trabajado algunas en concreto) y copiar rangos con ayuda del *mouse*.
2. Familiarización con las funciones, expresiones analíticas y la función “parte entera”.
3. Algunas nociones de experimento aleatorio, simulación, e ideas sobre el tratamiento experimental de fenómenos aleatorios mediante el estudio de frecuencias (distribución empírica de probabilidad).

Criterios de observación:
- Dificultades procedentes de...
    - El manejo de la herramienta.
    - La matemática
- Cooperación entre miembros del pequeño grupo.
- Nivel de complejidad de tareas realizadas.
- Identificación y uso de conceptos matemáticos.
- Descripción y explicación de los resultados que se obtienen.

Conocimientos a término:
- Valoración de la planilla de cálculo como recurso para trabajar fenómenos aleatorios y dar un tratamiento matemático. Cálculo automático de frecuencias. Elaboración automática de la distribución empírica de probabilidad.
- Aproximación a la distribución teórica de probabilidad de forma experimental.
- Elaboración de tablas de las distribuciones binomial y normal mediante planilla de cálculo.
- Determinación de las condiciones en las que una distribución binomial se aproxima a una normal y determinación de los parámetros.
- Uso de la distribución teórica normal para aproximar una binomial en casos concretos.

Secuencia de tareas (con comentarios didácticos y sobre la observación)
Tarea 1. Poner en marcha la hoja de cálculo y trabajar las posibilidades de la “función” “=ALEATORIO()” (“=RAND()” en versión inglesa).

Comentarios:
1. Se pretende conectar con las posibilidades de uso de los números aleatorios en la simulación para suscitar los primeros ejemplos sencillos de simulación, en relación con la versatilidad de la planilla (opciones de componer funciones y copiar rangos).
2. Conviene tener presente que la idea de función en el contexto de una planilla tiene distinto significado que el de función matemática. Se pueden discutir en cuestiones como: ¿Es realmente una función “=ALEATORIO()”? ¿Qué ocurre cuando se multiplica por números naturales?

3. La composición con la función “=ENTERO” y la copia de rangos da lugar a las primeras simulaciones con ejemplos sencillos extraídos de juegos como por ejemplo: sorteos de lotería, quinielas, lanzamiento de varias monedas, ...; o procedentes de situaciones cotidianas: número de coches que pasan por una calle, tiempo de espera en una cola, número de hijos por familia, número de canastas por partido de un jugador de baloncesto...

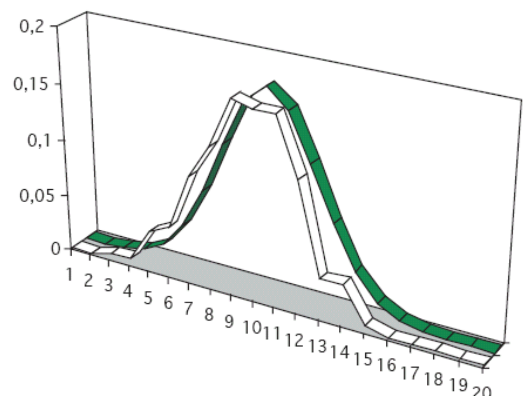
Criterios de observación para la evaluación:

1. Manejo de planilla (nivel de partida, comunicación e intercambio de información en el pequeño grupo)
2. Sobre la idea de simulación (equivalencia o grado de aproximación del experimento que se simula con el que se desea simular). Sobre la complejidad de la simulación (si se reclama la asistencia del profesor para conseguir simulaciones no inmediatas que requieran el empleo de *funciones lógicas*).
4. Sobre la actitud inicial ante el trabajo con computadoras (implicación individual en el trabajo, participación y cooperación)

Tarea 2. Explicación del docente de la utilidad «=FRECUENCIA» («=FREQUENCY» en versión inglesa) seguida de ejercicios de aplicación práctica por parte de los estudiantes donde la computadora haga el recuento de datos de las simulaciones anteriores y elabore automáticamente las tablas de frecuencia.

Comentarios:

1. La explicación al gran grupo en el laboratorio que comienza tras un trabajo práctico es difícil de llevarla a cabo sobre todo si interrumpe una tarea que entusiasma. Es probable que no se atienda a la explicación como es debido y continúen trabajando en lo anterior, haciendo confundir al profesor entre el alumno distraído con el verdaderamente motivado (por eso se distrae). Por estas razones, la explicación, si se decide dirigirla a todo el grupo, conviene iniciarla al comienzo de clase, antes de que se arranquen las computadoras
2. El docente puede usar en la explicación alguno de los ejemplos que hayan obtenido los alumnos.
3. “=FRECUENCIA” evita un trabajo pesado rutinario (de los más engorrosos en cualquier tarea estadística) que será apreciada especialmente por quienes hayan realizado recuentos en trabajos estadísticos.
4. Opcionalmente, si se considera conveniente, se llegará al recuento por intervalos.



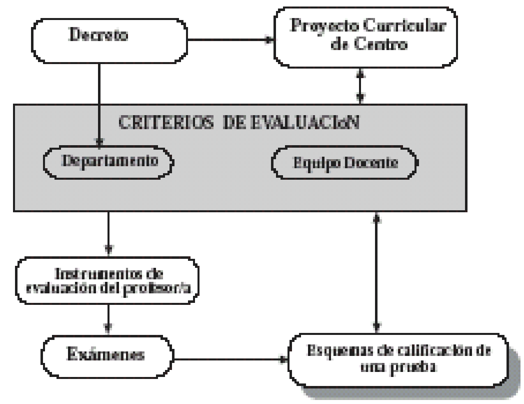
Criterios de observación:

1. Grado de atención (nivel de atención de los estudiantes y distracciones).
2. Preguntas y dudas de los alumnos.
3. Grado de efectividad de la explicación (observación de cómo los alumnos hacen los recuentos automáticos).

Tarea 3. Simular lanzamiento de varias monedas un número fijo de veces y contar número de “caras”.

Comentarios:

1. Este experimento de Bernouilli introduce mayor grado de complejidad en el manejo de los rangos y familiariza al con grandes simulaciones.
2. Usar 1 y 0 para cara y ceca respectivamente; el uso de la suma evita usar dos veces la opción frecuencia.
3. Conviene ajustar y graduar progresivamente los parámetros que intervienen a la velocidad de proceso.
4. El recálculo automático simula sucesivamente el experimento.
5.

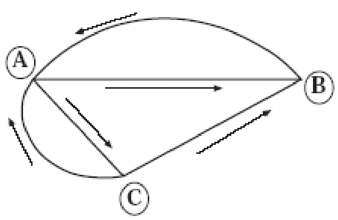


(figura 4.8)

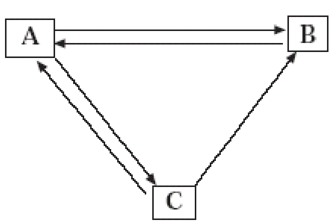
Para acelerar el cálculo de las frecuencias conviene dejar fijos los datos de la simulación (no hacerlos depender de fórmulas).
6. Esta tarea está dirigida a obtener la distribución experimental de probabilidad así como su gráfica.

Criterios de observación:
1. Progresivo dominio de la herramienta.
2. Uso y confección completa de la distribución experimental de probabilidad.

Tarea 4. *Calcular la probabilidad de que al lanzar veinte monedas obtengamos tres caras*.
<u>*Comentarios*</u>:
1. La computadora proporciona un acercamiento experimental a la distribución de probabilidad.
2. La figura compara ambas gráficas tras una simulación del lanzamiento de veinte monedas 500 veces.
3. El uso de "Pegado Especial" permite la sustitución de las fórmulas por valores y reduce el tiempo de cálculo de frecuencias en las grandes simulaciones.
4. El profesor irá dando sugerencias que mejoren la descripción, el resumen y la presentación.
5. Cabe la posibilidad de que algunos grupos lleguen a trabajar los gráficos, o mejorar la presentación disminuyendo el tamaño de las celdas.
6. La puesta en común puede servir para llegar a una medida que promedie las logradas por cada grupo.
7. Un objetivo es llegar a comparar las aproximaciones a la teórica y trabajar la ley teórica binomial mediante la utilidad "Binomdist".
8. Si se dispone de equipos potentes se puede ampliar con la propuesta del lanzamiento de 100 monedas 1000 veces. En esta simulación se observará experimentalmente cómo la distribución binomial B(100, 0.5) se aproxima a la normal N(50, 5).
Criterios de observación: 1. Estrategias para obtener la probabilidad a partir de las frecuencias como aumento del número de experimentos en una simulación o el promedio de las frecuencias en varias simulaciones. 2. Manejo de la planilla en simulaciones complejas (copia de rangos, estrategias de recuento, recuentos automáticos, gráficos, etc.).

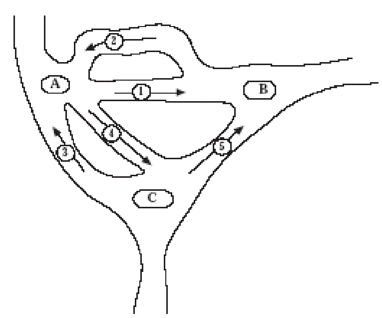


(figura 4.4)



(figura 4.5)

6.2. Actividad global de evaluación
Se presenta una actividad específica de evaluación manejando distintos criterios.



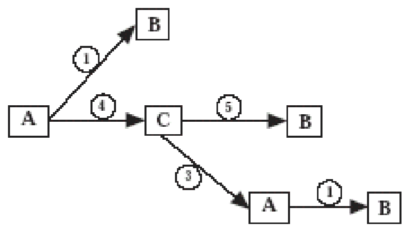
Situación En el recinto de calles de la figura a la derecha se organiza un trayecto para una carrera ciclista (A, B y C son puntos de control posibles) y respetar los sentidos de las calles

Tarea 1. Esquematizar en un grafo y una matriz de conectividad las calles que unen entre sí los tres controles.
Comentarios. 1. Una imagen esquemática se representa en la figura 4.4 y el grafo en la figura 4.5
2. Cada elemento de la matriz de conectividad representa el número de calles que conectan directamente dos vértices, teniendo en cuenta el sentido de la calle (el cero significa que no existe camino directo).

Desde		A	B	C
	A	0	1	1
Hacia	B	1	0	1
	C	1	0	0

Tarea 2. Se selecciona un recorrido con salida en A y llegada a B respetando el sentido de las calles, sin pasar dos veces por la misma y usando tres calles como máximo. ¿Cuántos recorridos posibles hay? ¿Cuál es la probabilidad de que un recorrido de estas características pase por la calle 3? ¿Por qué no son posibles los recorridos ABACB o ACBAB?

Comentario. El diagrama de árbol de los posibles trayectos muestra el espacio muestral del fenómeno probabilístico que se propone: (figura 4.6) Los tres recorridos son igualmente probables y probabilidad 1/3.



(figura 4.6)

Tarea 3. Una empresa de ropa deportiva quiere contratar un anuncio en una de las calles del recorrido. Sólo conoce los criterios de elaboración del trayecto propuestos en la tarea anterior ¿Habría alguna calle que previsiblemente elegiría para colocar el anuncio? ¿Con qué criterio?

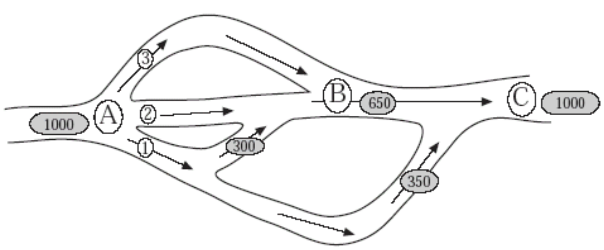
Comentario. La decisión debe ir hacia la calle por la que la carrera tenga más posibilidades de pasar. Es decir la calle 1 cuya probabilidad de estar en el trayecto de la carrera es 2/3.

Tarea 4. ¿Cuántos trayectos de la carrera pueden diseñarse que pasen exactamente por dos calles? ¿Cuántos de los trayectos anteriores parten de A? ¿Cuál es la probabilidad de que un trayecto que pase sólo por dos calles tenga la llegada en C? ¿Cuál es la probabilidad de que un trayecto con salida en A que pase sólo por dos calles, tenga la llegada en B?

Comentarios: El cálculo de todos los trayectos que se pueden hacer usando dos calles exactamente equivale al producto de la matriz de conectividad por sí misma. Por ejemplo, el elemento P13 de la matriz producto indica el número de trayectos que partiendo de C llegan a después de pasar por dos calles. La matriz producto es:

Desde		A	B	C
	A	2	0	1
Hacia	B	1	1	1
	C	0	1	1

El total de trayectos con dos calles es: 2+1+1+1+1+1+1 = 8. De ellos, 3 parten de A. La probabilidad de que tengan la llegada en C (suponiendo equiprobable la selección de cualquiera de ellos) es 2/8.



(figura 4.7)

Por último, la probabilidad de que tengan la llegada en B con salida en A es 1/3. En el plano esquematizado, entraron 1000 vehículos por A y salieron por C. Además se indican los vehículos que pasaron por ciertos puntos (los sombreados) . ¿Es posible determinar de manera única el número de vehículos que pasan por las calles 1, 2 y 3?

Comentario. Es necesario aplicar la condición básica de que el mismo número de vehículos que entran por A sale por C . Llamando x_1, x_2, y x_3 a los vehículos que pasan por las calles 1, 2 y 3 respectivamente, se obtiene el sistema de ecuaciones:

$x_1 + x_2 + x_3 = 1000$ - $x_2 + 300 + x_3 = 650$ - $650 + (x_1 - 300) = 1000$ - $x_1 - 300 = 350$

que es compatible indeterminado. La solución x_1 es única pero x_2 depende de x_3 o viceversa por lo que es preciso fijar una de las variables como parámetro.

Aplicación de los criterios de evaluación

La tarea 1 pretende valorar la capacidad de traducción de una situación geográfica al lenguaje matricial o de grafos (Criterio 1 de 2º, ver cuadro 4.1). La tarea 2 pretende valorar la capacidad para calcular probabilidades sencillas por recuento simple y manejando un diagrama en árbol u otra técnica eficiente (Criterio 5 de 2º ver cuadro 4.1). La tarea 3 analiza la perspectiva de una decisión con ayuda de la probabilidad (Criterio 5 citado).

La tarea 4 se presenta para valorar la capacidad de aplicar e interpretar el resultado de la matriz producto (producto de dos matrices como instrumento sistemático para calcular todos los trayectos con dos calles).

A su vez se quiere valorar la capacidad para encontrar cualquier otro procedimiento sistemático de obtención de todos los trayectos posibles. También, es posible, valorar los conocimientos de probabilidad de sucesos elementales y condicionados haciendo recuentos mediante el uso de la matriz producto (Criterios 1, 5 y 8 de 2º). En la tarea 5 se valora la capacidad para interpretar el flujo de entrada y salida de vehículos en los nudos de la red con sistemas de ecuaciones que liguen las incógnitas. El sistema resultante es indeterminado por lo que se pretende que los estudiantes den significado a fijar valores del parámetro del que dependen los flujos de otras calles. Se modeliza una situación en lenguaje algebraico, se aplica el cálculo con ecuaciones y se interpreta la solución cuando el sistema es indeterminado. (Criterios 2 y 8 de 2º).

6.3. Tipos de tareas en exámenes escritos según criterios de evaluación

Detrás de cada pregunta de un examen hay muchas decisiones. Antes de pasarla a los alumnos una prueba contiene (implícitamente) multitud de facetas referidas a qué evaluar y cómo calificar, no siempre recogidas en documentos. La reflexión sobre ese tipo de decisiones y la recopilación explícita de las mismas ayuda e informa en la práctica docente.

Desde aquí se plantean algunos requisitos básicos que deberían acompañar a las pruebas. No supone mucho trabajo añadido en la elaboración de un examen y consiste en preparar para cada cuestión o ítem una ficha.

Esta ficha o Esquema de Evaluación de la Prueba organizará información como esta:

1. Criterio(s) de evaluación aplicado(s)
2. Aspectos concretos a evaluar
3. Esquema de calificación

- Totales: Peso (porcentaje) de cada apartado sobre la puntuación total.
- Parciales: Indicadores, basados en prioridades del trabajo en clase, que determinan la puntuación parcial favorable y desfavorable en el caso de errores.
- Transversales: Aspectos concretos a tener en cuenta en todas las cuestiones y se aprecian global / cualitativamente.
- Tratamiento de errores: Penalización según el tipo de error.

Estos elementos contribuyen a controlar cómo se está efectuando el recorrido a lo largo del currículo y en qué medida se van consiguiendo los objetivos educativos y cubriendo los criterios de evaluación de matemática.

El diseño y la elaboración de un esquema de evaluación para una prueba corresponde únicamente al docente. Es una de las decisiones últimas e individuales. Por ello desde aquí, más que defender un formato o un modelo concreto, se enfatiza la necesidad de preparación explícita.

Sin otra intención que la de aclarar las ideas expuestas, se acompañan algunos ejemplos. A partir del segundo se omite el esquema de calificación.

Ejemplo 1

Curso: Primero - *Criterio de evaluación*: nº 3 del cuadro previo

Aspectos concretos a evaluar

- Representación de datos y manejo adecuado de escalas.
- Ajuste de datos a una función cuadrática.
- Paso de la tabla de valores a la expresión analítica de una función.
- Uso de funciones para describir fenómenos y hacer pronósticos

Tarea: La siguiente tabla expresa la resistencia de un hilo de pescar según el diámetro:

a) Representar aproximadamente la gráfica de una función que relacione la resistencia del hilo con su grosor y contenga los datos de la tabla. ¿Dónde empezarían la gráfica?

Grosor en milímetros	Resistencia en gramos
0.10	500
0.15	1125
0.20	2000
0.25	3125
0.30	4500
0.35	6125
0.40	8000

(cuadro 4.4)

b) ¿Qué grosor debe tener el sedal de un pescador que quiere pescar carpas entre medio kilo y dos kilos y medio?
c) ¿Con cuánto peso se rompe un hilo de 0.50 mm de grosor?
d) Encontrar, razonadamente, la expresión analítica de una función que se ajuste a los datos y utilizarla para contestar a la pregunta: ¿Puede aguantar un hilo de 1 mm de grosor, un pez que pesa 40 kilos?

Esquema de calificación
Totales: a) 20% b) 20% c) 20% d) 40%
Parciales: a) Valoración favorable de la gráfica definida para números positivos (sin punto de comienzo). b) Valoración positiva de un razonamiento explícito sobre la gráfica. c) Valoración positiva por el uso de 0.5 como genérico. d) Valoración positiva del razonamiento sobre los incrementos de la variable independiente para determinar que la función es cuadrática.
Transversales: Precisión del trabajo escrito, claridad y adecuación.
Tratamiento de errores: Se acompaña información sobre puntuación por apartado según el error sea: Técnico (10-20%) - Inferencia no válida (80-100%) - Interpretación incorrecta del lenguaje (50%) Datos mal utilizados (25-50%)

Ejemplo 2 - La siguiente tarea, muy parecida a la anterior, se propone con la intención de aplicar un criterio de evaluación diferente.
a) Hacer una representación gráfica de una función que se ajuste a los datos.
b) Estimar aproximadamente en qué año la población mundial era de 2100 millones de habitantes. Explicar como se dedujo.

Año	1650	1700	1750	1800	1850	1900	1930	1950	1960	1981	1985	1988	1993
Población	545	560	725	800	1100	1600	2000	2500	3000	4492	4897	5112	5600

c) Encontrar la expresión analítica de una función que se ajuste a los datos.
d) Hacer un pronóstico razonado de la población mundial en los años 2000 y 2025.

Ejemplo 3 - *Curso*: Primero
Criterio de evaluación: Un criterio no se corresponde unívocamente con un mismo tipo de tarea o pregunta de examen. Las siguientes preguntas se proponen aplicando el criterio 3 del cuadro.
Tarea 1 - La expresión f(x)=k/x representa a una familia de funciones (parámetro k).
a) Representar gráficamente las tres funciones de esta familia que se obtienen cuando k toma los valores 3, 1/2 y -5 respectivamente.
b) Explicar cómo cambian las gráficas según varía el parámetro.

Curso: Primero - *Criterio de evaluación*: nº 4 de la tabla previa
Aspectos concretos a evaluar

- Representación de datos y manejo adecuado de escalas.	- Ajuste de datos extraídos de situaciones reales (que no obedecen a ninguna fórmula algebraica simple) a una función conocida.	- Empleo de las funciones para hacer pronósticos.

Tarea
En la tabla se presenta la evolución de la población mundial:
c) Encontrar un fenómeno de dependencia ajustado a una función de la familia (o restricción de ella).
d) Describir dicho fenómeno mediante la gráfica de su correspondiente función.
Aspectos a evaluar

- Representación gráfica de funciones (uso de computadora o calculadora gráfica).	- Descripción de una familia de funciones según los valores de un parámetro.
- Identificación de fenómenos de dependencia que se modelicen mediante una función de proporcionalidad inversa.	- Descripción de un fenómeno a partir de la forma de su gráfica.

Tarea 2
El valor de un lugar de turismo es de 145.000 pesos y se deprecia, desde su compra, en un 20% anual.
a) Hallar su valor al cabo de tres años y de cinco años.
b) Definir una función que relacione el número de años con su precio.
c) Representar gráficamente dicha función.
Aspectos a evaluar

- Cálculo de porcentajes.	- Empleo de la función exponencial para generalizar una situación.	- Representación gráfica de la función exponencial.	- Selección de unidades y manejo de escalas

T*area 3*
Dada las familias de funciones: $y=kx^2$ $y=k/x$ $y=kp^x$ $y=\log k\ x$ se pide:
a) Nombre de cada una de las familias.
b) Para cada familia poner un ejemplo de un fenómeno de dependencia concreto que sea descrito mediante una función de dicha familia (o una restricción de ella).
Aspectos a evaluar

- Reconocimiento de familias de funciones.	- Identificación de fenómenos que se ajustan a determinados tipos de funciones.

Tarea 4
En la tabla se expresa el importe en centavos, de un viaje en taxi por la ciudad, en función de su duración en minutos: a) Hallar la expresión analítica de esta función (polinómica de grado 1)
b) ¿Cuánto vale la bajada de bandera? - (c) Calcular el importe de un viaje de 50 minutos.
d) Si un viaje ha costado 8225 centavos hallar el tiempo de dicho viaje.

Duración	20	30
Importe	2225	3225

Aspectos a evaluar

- Paso de tabla a expresión analítica. Interpolación lineal.	- Interpretación de parámetros de una función polinómica de grado uno.	- Obtención de valores directos e inversos de una función para resolver un problema.

Ejemplo 4

Una misma pregunta de examen puede ser propuesta aplicando diferentes criterios de evaluación y, si se trata de un problema abierto, éstos dependen del método elegido para la resolución.

Curso: Primero - Posibles criterios: 4, 5, 6 y 8 del cuadro previo

Tarea Has recibido un trabajo como técnico para cuidar de los pandas de un zoológico. Ignoras la cantidad de alimento que ingieren los pandas. Buscas datos y obtienes lo expuesto en la tabla siguiente: Según estos datos ¿qué cantidad de alimento necesitará el panda cada día?

Animal	Masa total	Longitud	Calor perdido	Cantidad de Alimentos
Tejón	17	0.70	17	1.5
Vaca	591	1.66	94	8.5
Oveja	100	1.07	39	2.8
Caballo	1000	1.82	117	10.5
Cerdo	360	1.41	74	6.7
Conejo	2	0.17	1	0.1
Panda	91	1.0		

Comentarios

En este tipo de pruebas muchos aspectos a evaluar están supeditados al método de resolución empleado.

Tejón	0.70	1.5
Panda	1	
Oveja	1.07	2.8

* Si se opta por ordenar los datos, la nueva tabla ofrece una situación favorable para hacer estimaciones. Por ejemplo, ordenando por longitud, el panda queda entre el tejón y la oveja.

Deben valorarse positivamente con diferencias según el grado de exactitud, distintas actuaciones de los alumnos tras esta situación, como:

a) Estimar *a ojo*

b) Representar gráficamente los datos y usarlos en la estimación. c) Interpolar linealmente

* Si se decide emplear herramientas estadísticas (correlación, regresión) los criterios serían diferentes a si se acomete buscando modelos de dependencia (expresiones analíticas de funciones) que ayuden a tomar la decisión.

El cuadro del "Decreto" presenta siete objetivos comunes para ambas materias: Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales I y II. Entendidos éstos como el referente general para valorar la madurez, se tienen que traducir a Ejercicios y Problemas adaptados a contenidos de la materia de media compatibles con los tipos de pruebas como las de acceso a la universidad.

Ejemplo - *Ejercicio*

1. La evolución de los beneficios en la venta de cierto producto durante los últimos seis años viene dada por una función y = f(x) en la que x representa el tiempo transcurrido e y los beneficios totales, en pesos en este tiempo. Esta función cumple que: $f(x)>0$, $f'(x) > 0$ y $f''(x) < 0$

a) Esboza una gráfica que cumpla estas condiciones y explica la evolución de las ventas en seis años.

b) Se conocen tres puntos de la gráfica A(1, 14), B(3, 36) y C(6, 49); calcula la expresión algebraica de un polinomio de 2º grado que contenga a los tres puntos, determinando si cumple las condiciones enunciadas en el apartado a).

c) Supongamos que la evolución de los beneficios siguiese el mismo ritmo que en los seis primeros años; ¿se podría decir que al cabo de cierto tiempo la empresa alcanzará el máximo beneficio y disminuirá después?. Razona la respuesta y calcula, si es posible, la fecha de beneficio máximo.

Criterios de valoración

Nota: La amplitud en la redacción del problema anterior obedece a la intención de obtener, en el mismo problema, ejemplos de varios criterios de valoración. En una prueba concreta podrían seleccionarse menos cuestiones, obviamente.

Criterios que pueden valorarse en una prueba con este problema, referidos al cuadro previo:

- En el apartado a) 1.a Comprensión de la traducción de las condiciones de la función beneficio, a la representación gráfica.
  4.b Capacidad de describir y argumentar con precisión la evolución de los beneficios.

Ejemplos de "grados de argumentación" : i) "hay beneficios"; ii) "crecen los beneficios"; iii) "decrece el crecimiento del beneficio".

- En el apartado b) 1.a y 5.c Capacidad para descomponer el problema en fases y traducir a un sistema de ecuaciones las condiciones dadas a la función. 4.a y 5.a Capacidad para resolver un sistema de ecuaciones y comprobar cálculos y soluciones. 1.c Capacidad para valorar si la función cumple las condiciones del problema.
- En el apartado c) 1.b, 3.a y 4.b Detectar un modelo (generalmente funcional) u otro criterio (por ejemplo gráfico) para predecir el beneficio máximo. Argumentar por qué este modelo es válido y cómo responde a la pregunta del problema. Valorar la originalidad de los argumentos utilizados.

Ver cuadro en la página siguiente.

Objetivos de las materias	Criterios de valoración en pruebas escritas
1. Aplicar sus conocimientos matemáticos a situaciones diversas, utilizándolos, en particular, en la interpretación de fenómenos y procesos de las ciencias sociales y humanas y en las actividades cotidianas.	En problemas de interpretación de fenómenos y procesos sociales: 1.a Valorar la comprensión de los datos y preguntas del problema: Localización de datos, incógnitas y relaciones entre ellas; traducción algebraica, gráfica... 1.b Valorar la detección de un modelo matemático, propiedad, estrategia o planteamiento adecuado a la resolución del problema. 1.c Valorar la revisión de la solución del problema con las condiciones iniciales del fenómeno y si la conclusión se ajusta a los datos y condiciones del problema.
2. Utilizar y contrastar estrategias diversas para la resolución de problemas, de forma que les permita enfrentarse a situaciones nuevas con autonomía, eficacia y creatividad.	En problemas que se puedan resolver por estrategias distintas o con lenguajes diversos (gráfico, algebraico, tabular...): 2.a Valorar los argumentos esgrimidos por el alumno para justificar que un método, gráfica o parámetro describe una situación o predice un acontecimiento mejor que otro. 2.b Valorar si antes de abordar un problema se elabora un plan.
3. Utilizar los conocimientos matemáticos para interpretar, elaborar juicios y formar criterios acerca de las informaciones sobre fenómenos sociales y económicos que aparecen en las diferentes fuentes de información, argumentando con precisión y rigor y aceptando las discrepancias y los puntos de vista diferentes.	En problemas que presenten información en tablas, gráficas, valores de parámetros, etc. , 3.a Valorar la originalidad, potencia, simplicidad... de la estrategia utilizada para obtener conclusiones 3.b Valorar la precisión de los argumentos esgrimidos para justificar la elección de un modelo de dependencia o un parámetro estadístico. 3.c Valorar la capacidad de criticar el uso de las matemáticas que hacen otros.
4. Mostrar actitudes propias de la actividad matemática como la visión crítica, la necesidad de verificación, la valoración de la precisión, el cuestionamiento de las apreciaciones intuitivas y la apertura a nuevas ideas.	4.a Valorar si el estudiante, repasa cálculos, verifica las soluciones en un problema, las respuestas o las estrategias más originales, la actitud crítica ante generalizaciones incorrectas aunque espontáneamente intuitivas... 4.b Valorar, en las conclusiones que se extraen de algunos problemas contextuales, el modo de argumentar, la precisión y rigor de los argumentos y la habilidad para manejar los conocimientos matemáticos.
5. Utilizar el discurso racional para plantear acertadamente los problemas, justificar procedimientos, adquirir cierto rigor en el pensamiento científico, encadenar coherentemente los argumentos y detectar incorrecciones lógicas.	Valorar: 5.a Rigor en el uso de notaciones, cálculo y propiedades. 5.b Precisión y coherencia en el encadenamiento de acciones al ejecutar una estrategia o procedimiento y claridad de los argumentos utilizados al describirlos. 5.c Rigor en el modo de razonar deductivo e inductivo. 5.c Capacidad para descomponer un problema en otros más simples.
6. Expresarse oral, escrita y gráficamente en situaciones susceptibles de ser tratadas matemáticamente, mediante la adquisición y el manejo de un vocabulario específico de términos y notaciones matemáticos.	6.a Valorar el uso correcto de los términos, reglas de cálculo, conceptos, fórmulas y propiedades en cualquier problema. 6.b Valorar la corrección en el modo de expresarse en los problemas: a) escrito: claridad, orden, precisión y originalidad; b) gráfico: uso adecuado de escalas, corrección en las técnicas de representación geométrica...
7. Establecer relaciones entre las Matemáticas y el entorno social, cultural y económico, apreciando su lugar como parte de nuestra cultura.	7.a Valorar la apreciación que el alumno tiene hacia las soluciones que aportan a ciertos problemas los métodos matemáticos con distintos niveles de precisión, frente a otros que no utilicen métodos matemáticos.

Producciones y Elaboraciones a lo largo de los Encuentros con los Docentes

Sin reproducir en este contexto el recorrido completo del curso y los encuentros con los profesores, creemos de valor citar algunas de las recomendaciones y referencias que formaron parte de los documentos que compartimos.

A continuación debe incluirse en el "dossier" del curso:

- *lo que aparece en el libro "Evaluación en Matemática" respecto de futilidad y otros criterios por contrastación negativa, cuya selección de copias puede solicitarse telemáticamente.*
- *sumar los que permiten el ajuste por consideraciones positivas:*
  - *fenomenológicas;*
  - *de doble juego de marcos acorde a Douday;*
  - *de secuenciación de situaciones acorde a ingeniería didáctica*
  - *y la propuesta de Evaluación por Carpetas y su aplicación al "Formulario de Solicitud Argumentada de Recuperatorio" para diseñar, también un dispositivo concreto).*
- *El documento de "Pautas de Evaluación" (que se ha adjuntado oportunamente por correo general)*
- *Las indicaciones para comunicar la dinámica de trabajo con cuadernillos-carpetas que establezcan*

Cuadernillos – Carpetas .... Inter.-juego de Comunicación Dinámica de Expectativas

Fe de Erratas

En este momento, muchos de ustedes ya deben haber notado las erratas y deslices que aparecen en los cuadernillos. No dejen de anotarlas en hojas aparte (al modo de "Fe de Erratas") indicando en cada ocasión la página, párrafo, lo que dice y lo que debiera decir.

Para el caso de cuadernillos que ya estuvieran impresos, lo único que puede hacerse es una "Fe de Erratas" y para los que aún no salieron a impresión, pueden subsanarse por edición, los errores. Convengamos que la edición y revisión suele ser la etapa más fastidiosa de la elaboración (Borges decía que se publica para no seguir corrigiendo... salvando las distancias... ;-)) pero es también la que distingue a quienes, como los expertos, conciben la tarea de escribir como proceso vivo... de quienes la afrontan de manera estática y por tanto, menos rica y productiva.

Ampliando y aclarando sin que oscurezca...

Si algunos de ustedes ya han probado una o más de las propuestas con los estudiantes y saben, por experiencia, que conviene hacer ajustes en las consignas (porque, por ejemplo, siempre se producen las mismas preguntas de aclaración o el mismo malentendido en algún ítem), podrían anotar en lo que bautizaríamos "Fe de Aclaraciones" una "Ampliación y Ajuste de Consignas", bajo la misma filosofía y mecanismo que la "Fe de Erratas" (como: "en la página ... en el párrafo ... , donde se lee .... puede que te aclare y amplíe el panorama una reformulación / ampliación de la consigna en estos términos ...")

Distinción de temas y conexos

En más de un caso, sobre todo cuando se han zambullido muy focalmente en el tema de "función", habrán notado que en la práctica les han venido muy bien el tratamiento de temas conexos como, por ejemplo, los cruciales:

- lectura e interpretación de gráficos
- tratamiento algebraico de algunas funciones
- elaboración de tablas y cruce con los diversos modos de representación...

Como en algunas propuestas de los cuadernillos cierto tema (interpretación de gráficos) es eje del desafío y, simultáneamente, no siempre el más adecuado para tratar análisis de funciones, les pediría que establezcan esta distinción.

Anoten, por favor, qué propuestas dedicarían a cuestiones introductorias y conexas como interpretación y lectura de gráficos, descartando de los que no son los más propicios, las consignas propias del análisis de funciones para destinar a esta tarea específica sólo los más adecuados y acaso posteriores.
En particular, es muy difícil y simultáneamente muy rico, el desafío de interpretación cuando lo que aparece graficado son los "cambios" (dinámica de descenso de peso, por ejemplo).
Cuando en esos casos, además de las preguntas de interpretación aparecen las de análisis, estas últimas "oscurecen" la validez de la tarea conexa y les restan la entidad que merecen... a ambas.
Sabemos que más de una vez nos ponemos "ambiciosos" y le pedimos "todo" a una misma situación o propuesta pero... es mejor darse un "segundo tiempo" para discriminar con calma "disciplinar y didáctica"... Así, es conveniente que distingan en una provisoria planilla interna, lo que van a destinar específicamente para una y otra tarea, además de anotar cómo modificarían, en tal sentido, la serie de consignas.

Carpeta ¿completa?... cuadernillo en interjuego
Si convenimos que el examen o prueba escrita podría no ser el único medio de evaluación, vale la pena que esto no se reserve como "secreto". De hecho, sabemos que el examen no es el único medio: nuestro intercambio en clase con los estudiantes "cuenta" en el momento de las correcciones porque no calificamos igual a todos... máxime cuando nos consta que en algunos casos un resultado correcto es indicio de profundo progreso, por ejemplo.
Si acordamos que es derecho de los estudiantes conocer los criterios y condiciones bajo los cuales serán evaluados, conviene explicitar a los estudiantes, y acaso a sus familias, que, por ejemplo, el interjuego del estado del cuadernillo / carpeta será considerado en el proceso de evaluación.

En tal sentido, si bien una introducción que hace las veces de "carta de intención" prologa a más de un cuadernillo, allí no aparece el modo en que serán puestas en práctica las alternativas a las que habilitan estos cuadernillos sino más bien una argumentación respecto de la selección de contenido del cuadernillo y de su derecho como docentes a determinarlo.
Está prácticamente ausente la explicitación sobre la expectativa de ustedes, como profesores, de la tarea alrededor de los cuadernillos y su interjuego complementario con la carpeta y en qué medida será un indicador mutuo y medio para establecer parte de la evaluación.

Por favor, intenten un borrador en esos términos... que pueden ser tan simples como explicitar que:

- presentar completos la carpeta / cuadernillo (o una sección específica o serie de ejercicios) es condición o elemento de evaluación (y cómo se considerará)
- anotar que sólo quienes presenten completas y revisadas las propuestas que en el cuadernillo se vinculen a los problemas y ejercicios que aparecen en cada examen, estarán en condiciones de solicitar la alternativa de recuperatorio...

En fin, lo que consideren en un borrador para conversarlo con los colegas y dejarlo definido en el último encuentro, de este aquí propuesto.

Del Inter.-juego relación carpeta-cuadernillo
Para "pasarles letra" por si les interesa saber cómo lo explican y argumentan otros, colegas y especialistas, aquí van recreaciones y reformulaciones de párrafos de lo que, en distintas jurisdicciones e instituciones, se ha empleado en la comunicación del rol y dinámica de empleo de cuadernillos-carpetas-libros y fuentes de consulta y referencia para respaldar el estudio y aprendizaje de los estudiantes y no sólo la enseñanza.

Van, como serie de recurso:

1. una recreación de un documento de Centro Babbage
2. una reformulación un documento de Secretaría de Educación de Ciudad de Buenos Aires (que vale la pena leer completo) del que tomamos algunos párrafos:

1. Tener alternativas "en carpeta"

Intentamos encarar la evaluación de modo integral, incluyendo las formas de evaluación alternativa: por desempeño y por carpetas-cuadernillos.
La evaluación debe tratarse con cuidado porque los alumnos pueden aprender a simular el conocimiento conceptual repitiendo respuestas dadas previamente (como definiciones o técnicas, por ejemplo), en vez de generar respuestas singulares a problemas y desafíos[13].
Los procedimientos de valoración tradicionales (exámenes), pueden complementarse a través de tareas que exigen al estudiante una mayor responsabilidad de organización de su estudio y de atribución de sentido. Por ejemplo, reflejada en...:

- la presentación de las propuestas del cuadernillo correspondientes al tema o temas de examen, completas y
- con justificación del modo de resolución y abordaje, explicitado en sus carpetas.

Producciones que, por otra parte, se irán tratando en clase, en puestas en común concertadas por la guía del docente y protagonismo de los estudiantes involucrados en:

- una verdadera actividad matemática) y en
- auto y hetero-evaluaciones que ofrecen...
  - oportunidades de considerar otras perspectivas
  - diversos métodos y medios para plantear y resolver

El análisis del aprendizaje por cuadernillos / carpetas, consiste en que el estudiante almacene su trabajo a lo largo de cierto tiempo, de tal manera que pueda ser revisado con relación al proceso y al producto, respecto de los diversos temas que se establecen como ejes de evaluación.

Los cuadernillos / carpetas permiten a los estudiantes y a los docentes juzgar los avances parciales y productos provisionales que han hecho como parte del desarrollo de una tarea.
Más allá de la exposición oral del docente, los textos, los exámenes[14], lo que surge de la revisión de cuadernillos / carpetas está más centrado en el estudiante en tanto:

- su aprendizaje puede ser monitoreado con una retroalimentación más inmediata (la mayor parte de los desafíos tienen respuestas y hasta desarrollo de planteo y resolución sea en el cuadernillo, sea en su correspondiente tratamiento en clase, en un ambiente de colaboración y reflexión)
- los mismos estudiantes pueden identificar sus errores

En este estilo de evaluación del desempeño y progreso, se intenta que no resulte sólo responsabilidad del docente:

- los alumnos comentan el trabajo de los otros
- retroalimentan las tareas
- se intercambia en clase en pro de una evaluación descriptiva del desempeño propio y de sus compañeros.

El docente empleará esta información, proveniente del interjuego cuadernillo/carpeta junto con sus evaluaciones cuantitativas y cualitativas del desempeño de los alumnos en las tareas y discusiones, para decidir un concepto evaluativo. Así, atiende ciertas dimensiones del aprendizaje como la capacidad de análisis, el pensamiento crítico, el conocimiento contextualizado, o aplicado en situaciones nuevas.

[13] Los docentes pueden auspiciar involuntariamente esta farsa sobre-enfatizando la necesidad de obtener respuestas correctas, sin viar medios o interpretar indicios para detectar los procesos que los estudiantes emplean efectivamente para llegar a las respuestas.
[14] Lo convencional es que lleguen a operar bajo el supuesto del docente transmitiendo conocimientos a los estudiantes hasta que llega el momento de evaluar sus logros con mediciones tradicionales.

La práctica de los exámenes no suscitará inquietudes sobre posibles "trampas" porque se establecerá una línea de continuidad y coherencia entre el trabajo en clase, el semi-autónomo pero acompañado por compañeros y docente en cuadernillos / carpetas personales y lo que se "toma" en cada examen.
Un componente importante del proceso de enseñanza y de aprendizaje que proponemos respaldar con estos medios es el de evaluación en proceso continuo y dinámico en que los alumnos multiplican sus oportunidad para expresarse y tratar con contenidos, procedimientos, y resultados del curso.

2. Reformulado de recomendaciones para el estudio en media

Distintos tipos de estrategias y actividades puedan orientar el estudio y generar propuestas que los alumnos puedan tomar para su actividad de estudio personal. Nos referiremos en particular al papel del cuadernillo y de la carpeta, que establecen interjuego en estrategias para desarrollar en la clase y a actividades para que los alumnos realicen con autonomía.

Un elemento de suma importancia en la escuela es la carpeta que en primaria es el espacio en que se anota según indicaciones del maestro (que indica qué deben escribir los alumnos y cómo deben hacerlo), mientras que en la escuela secundaria, las decisiones quedan cargo de los alumnos, a veces, abruptamente). Es decir, que la carpeta suele dejar de ser compartida entre el maestro y el alumno.

La carpeta, al complementar y suplementar el contenido de los cuadernillos, es el espacio en el que se deja registro de las interacciones que se producen en la clase y cobra un valor instrumental importante.

Para que este valor instrumental pueda construirse, es necesario que sea el alumno quien elabore y decida cómo incluir en la carpeta los aspectos centrales del trabajo.
Cuando los alumnos trabajan con el cuadernillo como guía de trabajos prácticos, las carpetas podrían estar llena de respuestas a ejercicios que en el cuadernillo están enunciados pero en nuestro caso, solicitamos que estén resueltos con una reflexión posterior escrita, producto de la discusión que se llevara adelante en clase acerca de los errores que pudieron haberse cometido al resolverlos y anotaciones que luego faciliten el estudio.
En tal sentido, no se tratará sólo de resolver cantidades de ejercicios, sino de llevar adelante todo un proceso respaldado por un proyecto que es el que intentamos y del que forman parte los cuadernillos.

Como, de este modo, la carpeta será un elemento de estudio del que puedan disponer los alumnos, incluso los que aún no saben o están apenas aprendiendo a tomar apuntes, en la clase se van a plantear actividades que les permitan valorar la función del interjuego cuadernillo / carpeta y mejorar los registros de lo que se realiza en clase (evaluación en común, correcciones mutuas, etc.).
Se puede proponer a los alumnos que redacten cuáles son las posiciones o resultados o métodos mayoritarios empleados para una resolución y el desarrollo durante la (auto)evaluación y puesta en común o tras la devolución de un examen, anotando una síntesis de lo ocurrido que se corroborará con el conjunto de la clase para corregirlo y arribar a una versión común.
Al tomar los apuntes correspondientes, de las actividades de clase, la carpeta complementará a los cuadernillos de forma "viva" y será en interjuego, un instrumento de trabajo... y como tal debe ser utilizable, no descartable. Porque será el lugar donde el alumno pueda buscar registros de lo que aprendió y cómo lo aprendió - y el docente, analizar su desenvolvimiento y progresos - porque allí debe estar "la historia" de su aprendizaje.
Mientras los cuadernillos contienen anotaciones generalizadas (explicaciones, propuestas y resoluciones de ejercicios), las carpetas los complementan porque recuperar el proceso personal y esperamos y alentamos y orientamos a los estudiantes para que vuelquen allí sus aclaraciones (como "¡cuidado con tal cosa!" o "esto lo hicimos por tal razón").

Con esta tarea se intenta fomentar una relación de responsabilidad con el conocimiento: el estudiante es responsable de lo que escribe y sabe que le será útil, que será reutilizado en el momento de estudiar, además de estar protagonizando su autoevaluación. Al escribir en su carpeta, tiene un proyecto a futuro en el cual su escrito jugará un rol importante.
Vamos a colaborar en clase para que los estudiantes comprendan esto y se involucren en el volcado escrito de sus auto-evaluaciones y comentarios, asignando en este sentido, momentos específicos para la escritura en la carpeta en relación con el cuadernillo y planificar tareas que tengan por objeto mejorar lo ya hecho en relación con lo auto y heteroevaluado y anotado.

El cuadernillo en la clase no se usará sólo para sacar ejercicios, la "teoría" aparecerá allí sintetizada (notamos que estudiantes que tienen dificultades de diverso orden para leerla de un libro de texto, están en camino de aprender a tomar apuntes correctos para anotar lo que se explica en clase)

En determinado momentos de clase, se les pedirá a los alumnos que busquen en el cuadernillo definiciones o explicaciones de algún tema que se haya trabajado para autoevaluar lo que aparece en sus exámenes y cuestionar, de no coincidir, ¿cuáles son las diferencias?, ¿son sólo diferencias de lenguaje?, ¿se están definiendo, bajo el mismo nombre, conceptos diferentes?, ¿es una definición más general que la otra?
De esta manera se estaría prestando especial atención a las distintas formulaciones de un concepto[15].

Preparando un examen
Antes de un examen, se analizar los temas que se incluirán en éste y se repasará lo que al respecto se haya estudiado, tomando nota de los títulos con los cuales aparecen en el cuadernillo y, eventualmente, lo que quedó volcado a carpeta al respecto. De este modo, se intentará determinar si todos fueron trabajados en forma autónoma y/o en clase.
Se les puede pedir a los alumnos que comparen el tratamiento de contenidos y las definiciones de los cuadernillos con las que aparecen en libros de texto que para ese fin se llevarán a clase en los momentos de repaso y recapitulación, a propósito de determinado tema o temas.

Leer para estudiar
Otra tarea que llevaremos adelante es acompañar en clase la lectura de una sección de temas (definiciones, tratamiento, técnicas, ejemplos) antes de darles la tarea de estudiar, leyendo de esta fuente. El espacio para una primera lectura en clase, tiene el propósito de ir consignando cómo leen, estudian, interpretan.... todas estas... tareas que van a resultar **crecientemente cruciales** a medida que avancen en sus estudios o, incluso, se establezcan en el mundo del trabajo.
La asignación de la tarea de estudiar de las lecturas se hará tras asignarles una primera lectura en clase - personal y silenciosa - a la que seguirá un tiempo destinado a las preguntas que consideran necesitan formular como explicación y aclaración. Deben anotarlas porque sólo "valen" las que sabemos provienen de la lectura-escritura (y no de la rápida "devolución" que pudieran intentar hacerle al docente de la responsabilidad de aprender) -.

Tareas para el hogar
Los desafíos del cuadernillo que se resuelvan "como tarea para el hogar", después se pueden recuperar en la clase entre todos, resolviendo los problemas, debatiendo algunos puntos, contestando preguntas.

Así, con el respaldo de las carpetas / cuadernillos, se puede programar una actividad en el aula que complemente el estudio previo que se realizó fuera de la escuela o que motorice y resulte útil para prepararse para llevarlo adelante.

---

[15] Habría que tomar la precaución, para ser un poco más abiertos, de llevar a clase otras definiciones, además de la que se anotó en el cuadernillo y/o a distintas clases de libros de texto.

Referencias generales y personales
Los alumnos suelen olvidarse de lo que se ha enseñado. "Eso no lo vimos" suele ser una frase habitual en la clase. Los alumnos se olvidan. Esto es una realidad que obedece –como siempre– a múltiples razones. La reflexión sobre lo hecho es una manera de trabajar sobre este olvido.
Hay muchas maneras de reflexionar. En este momento nos ocuparemos de una de ellas: la evocación. Evocar un problema es evocar las acciones sin realizarlas. Intentando decir colectivamente lo que sucedió, qué problema fue tratado, los alumnos son llevados a repensar el problema y los procedimientos de resolución utilizados. Esta actividad tiene una significación diferente a la de resolver: los alumnos tienen que pensar en el sentido del problema, más que en los detalles de su resolución.
En esta tarea, el interjuego cuadernillo / carpeta cumple un rol de respaldo crucial porque es la fuente de consulta eventual para llegar a acuerdos frente a posibles discrepancias de distinto orden en "lo evocado"[16].

El por qué del racional
Todos los párrafos está completamente recreados y reformuladas y no responden a las fuentes documentales literalmente.
Se ha colocado entre paréntesis o como nota al pie, lo que de modo alguno se comunica a los estudiantes y padres sino que amplía "entre nosotros" el racional que subyace a lo que vaya a explicitarse a la comunidad.

Acaso, este tipo de devoluciones respecto del posicionamiento que se puede querer darle a los cuadernillos y la imprescindible explicitación de las expectativas correspondientes a padres y estudiantes es muy importante para los profesores por el común compromiso que pusieron en el proyecto y el nivel de desarrollo, sin duda desigual pero evidente en cada año.

Quizá estas orientaciones-devoluciones pueden dar pie a discusiones si no para lo efectivamente y completamente hecho al momento, al menos para lo que se planee hacer en futuras ediciones y versiones aumentadas y corregidas (como dicen los editores...).

Para ampliar el encuadre de contextos y en ida y vuelta, ayudar a des/re/contextualizar
Es habitual que al finalizar la clase los alumnos no puedan identificar qué se hizo ni qué es lo que deben retener de las actividades que se llevaron a cabo. Muchas veces, esto sucede porque creen que el objeto de enseñanza es el ejercicio puntual que resolvieron y no reconocen un tema a propósito del cual se hicieron algunos problemas. Esto es muy claro en los alumnos flojos que tienen muchas dificultades en la descontextualización de los conocimientos.
Por ejemplo, si se hizo una actividad acerca de proporcionalidad o Thales empleando un juego de sombras respecto de la fuente umbrosa, algunos alumnos pueden retener sólo el contexto: *trabajamos en el patio con sombras o fotos, etc*.
Según indican investigadores como Marie Jeanne Perrin-Glorian, las diferencias entre los alumnos flojos y los que no lo son se observan cuando se intenta reutilizar los conocimientos.
Pareciera como si el saber señalado por el docente y descontextualizado[17] no tuviera relación con los conocimientos utilizados por ellos al resolver un problema.

[16] El proceso mental que se requiere para hablar de lo que se hizo es mucho más complejo que el que se requiere sólo para "hacer". Los alumnos deben describir los problemas resueltos –indicando su enunciado, explicándolo, diciendo cuáles eran los datos y cuál la pregunta– pero además deben relatar los distintos procedimientos de resolución utilizados en clase. Para garantizar que todos los alumnos participen del momento de evocación, el docente puede solicitarles que la preparen, o sea que comiencen con este trabajo de recuperación, antes de la clase.
[17] Aquí va una acepción particular de los términos "contexto" y "descontextualizado" alejado del de aplicación en un contexto. Se entiende aquí el "contexto en que aprendieron o en que se enseñó" que es distinto a, por ejemplo, una dificultad de resolver, empleando un conocimiento o recurso, en determinado contexto, tal como sería la dificultad particular para resolver empleando recursos tan simples como la función lineal, en "contextos" de economía y contabilidad, por ejemplo.

Los alumnos retienen lo que explica el profesor a propósito de la resolución de uno o más problemas pero no lo utilizan para encontrar otros resultados.
Algunos alumnos, que tienen ciertos recursos facilitados, tienen un proyecto (generalmente implícito) de des-contextualización desde el momento que trabajan en la resolución de un problema (en la medida en que "transcurra" en cierto "ambiente" – sea intra o extramatemático - para el que la atribución de sentido esté habilitada para este alumnos). Resuelven el problema planteado con un proyecto de recordar y volver a utilizar sus elementos en otras situaciones, lo que les permite, aunque sea parcialmente, reutilizar el conocimiento (aunque no esté totalmente identificado).

Otros estudiantes sólo resuelven el problema planteado, si la chance de retener lo que podrían volver a aplicar a otras situaciones (no sólo en tanto el "ambiente" no les resulta familiar en sentido atribuible, sino en términos generales). Esto explica por qué no pueden adaptar las herramientas elaboradas para resolver otros problemas.
La falta de confiabilidad que tienen los alumnos "flojos" en los conocimientos antiguos explica en parte el no reconocimiento del verdadero desafío de las situaciones propuestas en clase y la falta de identificación del objeto del trabajo propuesto por el maestro, lo que también obstaculiza el aprendizaje. El no reconocimiento del objeto de enseñanza hace que las situaciones se desgasten rápidamente, antes de llegar a una descontextualización suficiente para una **reinversión** ulterior de los conocimientos. Sobre todo, de los puestos en juego en la situación[18].

Contribuciones (des) y (re)contextualizantes en el estudio respaldado por cuadernillos/carpetas
Para contribuir a la identificación de lo que se trató en cada clase puede plantearse bajo que título y subtítulo aparece en el cuadernillo y/o en el/los libro/s de texto con que se complementa la tarea (y que se puede/n llevar al aula con ese propósito) para discutir y determinar por qué.
Por grupos, se haga una pequeña crónica de lo que ocurrido y se guarde un registro de lo que se aprendió. Se puede hacer de forma rotativa, a cargo de un alumno o un grupo cada vez. La crónica no debe sólo incluir el título sino también identificar con qué tipos de problemas se trabajó, cuáles fueron los errores más comunes que se cometieron y cuáles son los elementos que hay que retener. Por supuesto, la elaboración de la crónica requiere de un aprendizaje y no es esperable que los alumnos la elaboren de manera completa las primeras veces pero puede ser parte de lo que se plantea para el interjuego cuadernillo / carpeta.

La idea podría ser que cada clase comience con la lectura de la crónica de la clase anterior para reubicarse en el tema en el que se está trabajando o, al menos, que tras cada examen, se analice lo que "se tomó" en esos mismos términos. De este modo, tras el examen, aún a los que fue mal (o justamente a los que les fue mal), tienen que tomarse la molestia de vincular lo que se "les tomó" con el contenido de lo trabajado (desde y hacia el cuadernillo). Así, intervienen incluso, en el trabajo de devolución en común de desempeño en los exámenes.
Si esto se establece, el trabajo de diseño de exámenes se va a articular con contenido/edición de los cuadernillos. Además, en próximas ediciones, la "plantilla" que facilite el volcado de distintos tipos de "crónicas", pueden sumarse al contenido de cada cuadernillo para que se completen en carpeta.

La lectura de la crónica funcionará como una retroalimentación acerca de su eficacia, ya que los alumnos que no participaron de su confección podrán opinar acerca de si es completa, clara y pertinente. De esta manera se logra que toda la clase comience desde el mismo punto de partida.

---

[18] Sería "resolver por intento de cura de espanto" y agravaría la dificultad, presentar los contenidos y recursos conceptuales e instrumentales ya "descontextualizados" de entrada: para evitar el riesgo de que queden demasiado "pegados" a una única situación, directamente se sobre-simboliza y formaliza antes de tiempo, presentando. Esto es evitar un riesgo abriendo un peligro directo: que los alumnos no logren atribuirle sentido a lo que está en juego por la excesiva formalización que se exige de entrada (como cuando padecimos la fiebre del hiper-formalismo conjuntista).

Si es posible, sería importante que todo el curso tenga una copia de la crónica, al menos de las del examen, en su carpeta.
Esto, junto con los apuntes que cada uno haya podido tomar, permitiría acceder a un registro. Debería ser también un material de mucha utilidad para los alumnos que estuvieron ausentes (y que son los primeros en pedir recuperatorio).

En busca de co-autores
Una parte del cuadernillo puede dejarse para darles a los estudiantes la oportunidad de "autoría" al dedicarse unas hojas que se pueden agregar a un sobre que se pegue en la contratapa, a confeccionar:

- un glosario de términos matemáticos
- una índice de fórmulas
- una tabla de valores de funciones trigonométricas y logaritmos "claves" en valor y base

y/o

- las eventuales tablas de unidades del SMD (o la sigla que se use hoy día)

e incluso

- eventuales “problemas” para dar “ambiente” a formulaciones algebraicas, sistemas de ecuaciones, etc.

Sea que les den contextos alternativos a las propuestas que aparecen en los cuadernillos o que lo “produzcan” de la nada... lo que antes sólo ofrecen “los números”[19]. Este tipo de tareas, no sólo apunta a la devolución de responsabilidades y autonomía de los estudiantes, sino también a la apropiación del cuadernillo como algo del que no se es sólo "usuario" sino también "protagonista... co-autor".

Autora y Compiladora: Prof. Ing. Liliana Mónica Saidón (UBA)
ISBN: 987-1330-03-0 - ISBN13: 978-987-1330-03-4

---

[19] Frente a la tarea de tener que encontrar soluciones de una ecuación de dos variables, uno de los alumnos entrevistados no encuentra soluciones y sólo, cuando la entrevistadora le formula un problema que se modeliza mediante la ecuación dada, él puede dar valores a una de las variables y obtener valores de la otra. A continuación se da el siguiente diálogo:
E: –Esto que vos hiciste te sirve para resolver la ecuación que te planteamos al principio...
A: –Sí.
E: –¿No podrías haberlo hecho sin el problema?
A: –No, porque la imaginación que me da este problema no me la dan los números solos.
Concluimos que utiliza –y necesita– un problema como referente para el proceso de resolución, en el siguiente sentido: sólo atribuyendo significado a las variables puede considerar valores numéricos. A partir de allí obtiene las soluciones operando algebraicamente. Este resultado da cuenta de la dificultad de concebir el concepto de *variable* de manera independiente de la variación de una magnitud referida a un objeto. Un texto de Frege sobre el concepto de *función* ofrece un marco para interpretar esta cuestión:
«[...] ¿son las variables del análisis números variables? ¿Qué tendrían que ser además si, en general, pertenecen al análisis? Pero, ¿por qué casi nunca se dice *número variable* y sí, por el contrario, a menudo *longitud variable*? Parece esta expresión más admisible que *número variable*. Entonces, crece la duda: ¿Hay números variables? [...] Cuando algo cambia, tenemos sucesivas, diferentes, cualidades y estados en el mismo objeto. Pero, si él no fuera el mismo, no tendríamos ningún sujeto del cual pudiéramos afirmar el cambio. Una vara se dilata con el calor. Mientras esto sucede, continua siendo la misma. Si en lugar de ello se la arroja y se la sustituye por una más larga, no se podría decir que se ha dilatado. Un hombre envejece, pero, si no lo podemos a pesar de todo reconocer como él mismo, no tendríamos a nadie del cual podríamos decir la edad. Apliquemos esto al número. Si cambiamos un número, ¿qué queda del mismo? Nada. En consecuencia, no se cambia de ningún modo un número, pues no tenemos nada respecto de lo cual podríamos predicar el cambio.” En síntesis, la producción de algunos alumnos es significativamente distinta de la de los otros: centrados en el objeto función, y apelando al contexto ofrecido por el o los problemas que les presten “ambiente”, pueden no sólo encontrar un procedimiento para encontrar distintas soluciones sino ir perfilando la construcción del “objeto función”... a veces... se precisa pasar por la labor de autor para leer correctamente el contenido de un texto.

Bibliografía

Brousseau, G. (1986). *Fondements et Méthodes de la Didactiques des Mathematiques*. En la revista Recherches en Didactique des Mathématiques, vol 7, No 2, Pg 33 – 115.
Fortuny, J. et al.(1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número*. Síntesis.
García, G. et al (2003). *Modelos y Prácticas Evaluativas de las Matemáticas en la Educación Básica. El Caso del Campo Multiplicativo*. Proyecto de investigación aprobado por COLCIENCIAS 2002-2004 con el auspicio de la Universidad Pedagógica Nacional.
García, G. et al.(1997). *Elementos para Construir una Didáctica de la Función.* Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.
National Council of Teachers of Mathematics. (N.C.T.M.) (1995). Assessment *standards for school mathematics.* Reston Virginia.
Rico L. et al. (1997). *Cuestiones abiertas sobre evaluación en matemáticas*. En: Uno Revista de Didáctica de las matemáticas No 11. España. Págs. 7-23.
Vergnaud, G. (1993). *Teoría de los Campos Conceptuales*. En: Lecturas en Didáctica de la Matemática Escuela Francesa. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV- IPN. México. Pg. 88-117.
Weeb (1992). *Assessment of Student´s knowledge of Mathemathics: steps toward a theory*. Capítulo 26 del Handbook of Research on Teaching and Learning Mathematics D.A. Grows editor. MacMillan. New **York.N L**. Traducción resumida del inglés por el Prof. D: Luis Rico Romero. Departamento de Didáctica de la Universidad de Granada.